第六章 立体几何初步

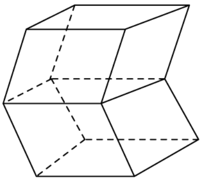
§1 基本立体图形

1.1 构成空间几何体的基本元素+
1.2 简单多面体——棱柱、棱锥和棱台

对点上分

1. C 【解析】根据题图可知该几何体的顶点为 S,A,B,C,共 4 个;棱为 SA,SB,SC,AB,AC,BC,共 6 条;面为 SAB,SAC,SBC,ABC,共 4 个. **故 C 正确.**

2. B 【解析】底面和侧面的公共边不是侧棱,A **错误**;



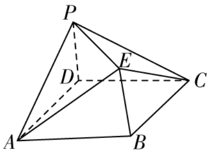
根据棱柱的特征知,棱柱的两个底面一定是全等的,故棱柱中至少有两个面的形状完全相同,B **正确**;

正六棱柱的两个相对侧面互相平行,C **错误**;

有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形并不能保证其对应几何体是棱柱,如图所示的几何体就不是棱柱,D **错误. 故选** B.

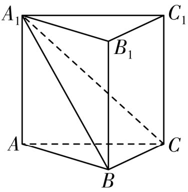
易错警示 **遗漏棱柱的特征导致判断出错**

有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形的多面体不一定是棱柱,如上图,棱柱还需要满足各侧棱互相平行且相等. 判断时不要遗漏任何一个特征. 类似地,有一个面是多边形,其余各面都是三角形的几何体不一定是棱锥,如图.

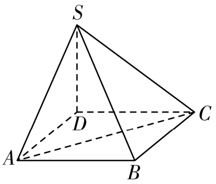


此外,棱柱有两个互相平行的面,并不表明只有两个面互相平行,如长方体,有三组对面互相平行,其中任意一组对面都可以作为底面.

3. AB 【解析】因为棱台是由平行于棱锥底面的平面截得的,所以棱台侧面都是梯形,**故 A 正确**;



图①



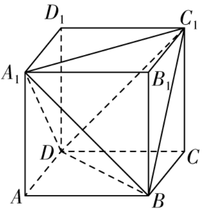
图②

棱柱被平面分成的两部分可以都是棱锥，如图①，三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 被 $\triangle A_1BC$ 所在平面分为两个棱锥 A_1-ABC 和 $A_1-BCC_1B_1$，**故 B 正确**；

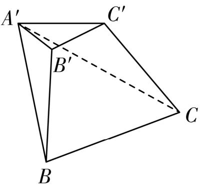
用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面和截面之间的部分组成的几何体才是棱台，**故 C 错误**；

棱锥被平面分成的两部分可以都是棱锥，如图②，四棱锥 $S-ABCD$ 被 $\triangle SAC$ 所在平面分成两个三棱锥 $S-ACD$ 和 $S-ABC$，**故 D 错误. 故选 AB.**

4. C 【**解析**】如图，以正方体顶点 A 为顶点、正方体的棱为侧棱的三棱锥 $A-A_1BD$ 为正三棱锥，符合题意，此类三棱锥共有 8 个. 此外，以正方体顶点为顶点、面对角线为侧棱的三棱锥 A_1-BC_1D，$A-B_1CD_1$（图略）为正三棱锥，此类三棱锥共有 2 个. 其余情况均不符合题意，所以符合条件的正三棱锥的个数为 $8+2=10$. **故 C 正确.**



5. B 【**解析**】如图所示，三棱台 $A'B'C'-ABC$ 沿平面 $A'BC$ 截去三棱锥 $A'-ABC$，剩余部分是四棱锥 $A'-BCC'B'$. **故 B 正确.**

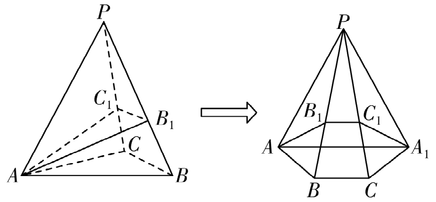


6. C 【**解析**】由题图①可知，同心圆与圆相对，加号与箭头相对，心形与星星相对. 由题图②可得，小正方体从图示的位置翻到第 1 格时，同心圆图案正面朝上，翻到第 2 格时，加号图案正面朝上，…，翻到第 6 格时心形图案正面朝上. **故 C 正确.**

7. B

攻略上分 本题考查正三棱锥表面的最短路径问题，可以将正三棱锥展开，转化为平面问题，通过两点之间线段最短求解，具体可见通法攻略 42.

【解析】正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面展开图如图所示.



因为 $\angle BPC=20°$，所以 $\angle APA_1=60°$. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle AB_1C_1$ 的周长为 $AB_1+B_1C_1+C_1A$，要使 $\triangle AB_1C_1$ 的周长最小，则在其侧面展开图中，A,B_1,C_1,A_1 共线，即 $AB_1+B_1C_1+C_1A=AA_1$. 又正三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱长为 4，在其侧面展开图中，$\triangle APA_1$ 是等边三角形，所以 $(AB_1+B_1C_1+C_1A)_{\min}=4$，即虫子爬行的最短距离是 4. **故 B 正确.**

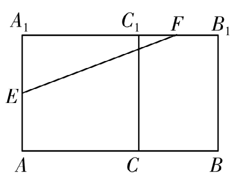
8. C 【解析】E,F 分别在 AA_1,C_1B_1 上，所以相关面展开后的图形中必须有 AA_1,C_1B_1，故展开方式有以下四种：

(1)沿 CC_1 将面 BCC_1B_1 和面 ACC_1A_1 展开至同一平面，如图①，得 $EF^2=4+18+8\sqrt{2}=22+8\sqrt{2}$；

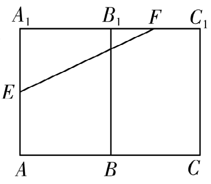
(2)沿 BB_1 将面 ABB_1A_1 和面 BCC_1B_1 展开至同一平面，如图②，得 $EF^2=4+18=22$；

(3)沿 A_1B_1 将面 ABB_1A_1 和面 $A_1B_1C_1$ 展开至同一平面，如图③，得 $EF^2=8+6+4\sqrt{2}=14+4\sqrt{2}$；

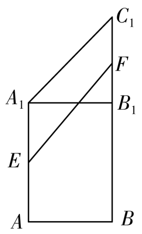
(4)沿 A_1C_1 将面 $A_1C_1B_1$ 和面 ACC_1A_1 展开至同一平面，如图④，得 $EF^2=9+9=18$. 比较可得 EF 的最小值为 $3\sqrt{2}$. **故 C 正确.**



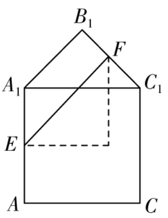
图①



图②



图③



图④

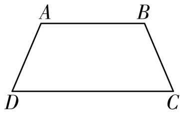
易错警示 求最短路径问题时考虑不全面致错

通过几何体表面展开图求最短路径时,要注意考虑有哪几种不同的展开方式,通过对比选出最短的,注意避免因为思维定式只找到最常见的一种即下结论.

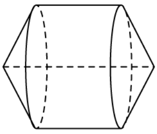
1.3 简单旋转体——球、圆柱、圆锥和圆台

对点上分

1. D 【解析】图①是一个等腰梯形,CD 为较长的底边,以 CD 边所在直线为旋转轴旋转一周所得几何体为一个组合体,如图②,包括一个圆柱、两个圆锥,**故 D 正确.**



图①


图②

2. A 【解析】此几何体上面是一个圆锥,下面是一个圆台,所以可由 A 中的平面图形旋转一周形成. **故 A 正确.**

方法总结 已知组合体寻找形成它的平面图形问题,首先分析该组合体是由哪些简单几何体组合而成的,然后据此找到对应的平面图形及旋转轴;对于不规则的平面图形绕轴旋转问题,首先确定旋转轴并对原平面图形作适当分割,一般分割成矩形、三角形、梯形、圆等基本图形,再结合旋转体的形成过程进行分析.

3. D 【解析】观察题图,图①的上、下底面既不平行又不全等,所以图①不是圆柱,**故 A 错误;**

图②和图③的母线长不全相等,故图②和图③不是圆锥,**故 B 错误;**

图④的上、下底面不平行,故图④不是圆台,**故 C 错误;**

图⑤的上、下底面平行,且母线延长后交于一点,故图⑤是圆台. **故 D 正确.**

4. C 【解析】由棱台、圆台的结构特征可知 **A 和 B 正确;**

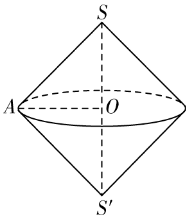
直角三角形绕斜边所在直线旋转一周所形成的几何体不是圆锥,是由两个同底圆锥组成的几何体,**C 错误;**

在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点,

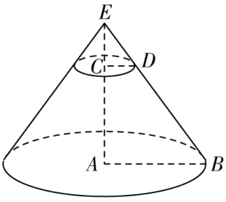
这两点的连线不一定是圆柱的母线，只有当这两点的连线平行于轴时才是母线，D 正确.

易错警示 忽略旋转轴的特殊要求致错

直角三角形绕其任一边所在直线旋转一周形成的几何体不一定是圆锥，如图. 圆锥需满足以一条直角边所在直线为旋转轴.



5. A 【解析】如图，由题意可得圆台的上、下底面半径的比为 $\frac{CD}{AB}=\frac{1}{4}$，且 $CD/\!/AB$，$BD=12$. 设圆锥的母线长为 l，根据相似比可得 $\frac{CD}{AB}=\frac{ED}{EB}=\frac{l-12}{l}=\frac{1}{4}$，解得 $l=16$，即原圆锥的母线长为 16. 故 A 正确.

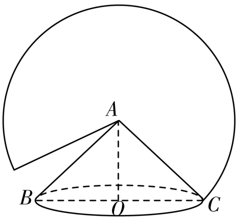


6. C 【解析】甲、乙两地在北纬 45°线上，甲、乙两地间的弧所对圆心角为 $120°+60°=180°$，即甲、乙两地在北纬 45°线所在小圆的直径的两端，且小圆的半径 $r=R\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}R$，因为 $R^2+R^2=(\sqrt{2}R)^2$，所以甲、乙两地的球心角为 90°，故甲、乙两地的球面距离为 $\frac{\pi}{2}R$. 故 C 正确.

7. D 【解析】若 4 为圆柱的底面周长，则圆柱的高为 2，此时圆柱的底面直径为 $\frac{4}{\pi}$，故圆柱的轴截面的面积为 $2\times\frac{4}{\pi}=\frac{8}{\pi}$；若 2 为圆柱的底面周长，则圆柱的高为 4，此时圆柱的底面直径为 $\frac{2}{\pi}$，故圆柱的轴截面的面积为 $4\times\frac{2}{\pi}=\frac{8}{\pi}$. 故 D 正确.

8. B 【解析】如图，设直角圆锥底面半径 $OC=r$，直角圆锥母线 $AC=l$，直角圆锥的

侧面展开图的圆心角大小为 α，由直角圆锥的定义可得 $AO=OC=r$，则 $l=AC=\sqrt{2}r$，由 $\alpha l=2\pi r$ 可得 $\alpha=\frac{2\pi r}{l}=\frac{2\pi r}{\sqrt{2}r}=\sqrt{2}\pi$. **故 B 正确.**



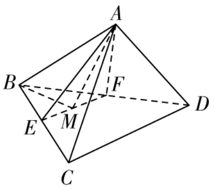
9. C 【解析】设圆台的上底面半径为 r cm，下底面半径为 R cm，母线长为 l cm，高为 h cm，由题意可得 $\begin{cases}2\pi r=\frac{1}{2}\times2\pi\times2,\\2\pi R=\frac{1}{2}\times2\pi\times4,\\l=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=1,\\R=2,\\l=2,\end{cases}$ 所以该圆台的高 $h=\sqrt{l^2-(R-r)^2}=\sqrt{3}$(cm). **故 C 正确.**

10. B 【解析】设底面积较小的圆锥 A 的底面半径为 r_1，母线长为 l_1，底面积较大的圆锥 B 的底面半径为 r_2，母线长为 l_2. 依题意可得 $\pi r_1^2=\frac{\pi}{4}$，$\pi r_2^2=4\pi$，解得 $r_1=\frac{1}{2}$，$r_2=2$，所以 $\frac{2\pi r_1}{l_1}+\frac{2\pi r_2}{l_2}=\frac{\pi}{l_1}+\frac{4\pi}{l_2}=2\pi$，$\frac{1}{l_1}+\frac{4}{l_2}=2$，所以 $l_1+l_2=\frac{1}{2}(l_1+l_2)\left(\frac{1}{l_1}+\frac{4}{l_2}\right)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{l_2}{l_1}+\frac{4l_1}{l_2}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\frac{l_2}{l_1}\cdot\frac{4l_1}{l_2}}\right)=\frac{9}{2}$，当且仅当 $\frac{l_2}{l_1}=\frac{4l_1}{l_2}$，即 $l_1=\frac{3}{2}$，$l_2=3$ 时等号成立. **故 B 正确.**

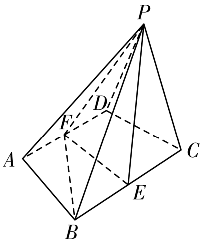
11. B 【解析】由题图可知，该几何体由一个球、一个长方体、一个棱台构成. **故 B 正确.**

12. D 【解析】由题图可看出该几何体是由两个同底的四棱锥组成的，其棱为 $MA,MB,MC,MD,AB,BC,CD,DA,NA,NB,NC$ 和 ND，共 12 条；顶点是 M,A,B,C,D 和 N，共 6 个；有面 MAB、面 MBC、面 MCD、面 MDA、面 NAB、面 NBC、面 NCD 和面 NDA，共 8 个，且每个面都是三角形. **故 A，B，C 说法正确，D 说法不正确.**

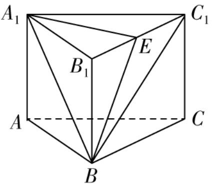
13. D　【解析】如图①，在三棱锥 $A-BCD$ 中，E,F,M 分别是 BC,BD,EF 的中点，则三棱锥 $A-BCD$ 可分割成三棱锥 $A-BEM$，$A-BFM$ 和四棱锥 $A-CDFE$，A **有可能**；



图①



图②



图③

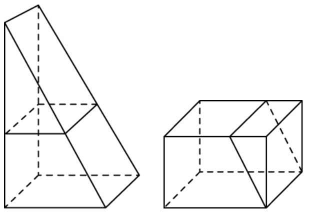
如图②，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，E,F 分别是 BC,AD 的中点，则四棱锥 $P-ABCD$ 可分割成三棱锥 $P-ABF$，$P-BEF$ 和四棱锥 $P-CDFE$，B **有可能**；

如图③，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 为 B_1C_1 的中点，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可分割为三棱锥 B_1-A_1BE，C_1-A_1BE 和四棱锥 $B-ACC_1A_1$，C **有可能**；

一个四棱柱割去一个四棱锥后的几何体不可能由两个三棱锥拼成，D **不可能**.

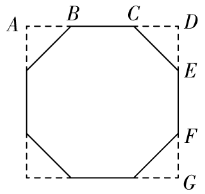
14. ①④　【解析】①可以由一个四棱柱和一个三棱柱组成，④可以由两个四棱柱组成；②不可能由棱柱组成；③是三棱锥，不可能由两个棱柱组成.

规律方法　简单组合体常见的构成形式：(1) 由简单几何体拼接而成；(2) 由简单几何体截去或挖去一部分而成. 如本题题图①还可以由三棱柱截去一个小三棱柱或由四棱柱截去一个三棱柱得到.



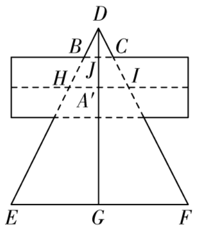
15. A　【解析】可以将该多面体分为三层，上层 8 个面，中层 8 个面，下层 8 个面，上、下底各 1 个面，所以共有 8+8+8+1+

$1=26$(个)面. 设半正多面体的棱长为 a,作出该几何体的截面如图,截面为正八边形,由图可得 $CD=\frac{1-a}{2}$,$CE=a$. 因为 $\triangle CDE$ 为等腰直角三角形,所以 $CE=\sqrt{2}\,CD$,即 $a=\sqrt{2}\times\frac{1-a}{2}$,解得 $a=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$,所以该半正多面体的棱长为 $\sqrt{2}-1$,**故 A 正确.**



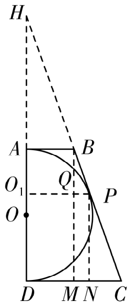
二级结论 多面体欧拉定理:一般地,凸多面体顶点数 V+面数 F−棱数 $E=2$. 本题中半正多面体棱数为 48,由题图可得顶点数为 24,所以面数为 $2+48-24=26$.

16. C 【解析】过点 B,C 作垂直于正四棱锥底面的截面,如图所示.



由题意可得 $DE=3\sqrt{10}$,因为正四棱锥的底面边长为 6,所以 $EF=6\sqrt{2}$,$DG=\sqrt{DE^2-EG^2}=6\sqrt{2}$,$HI$ 的长度为正四棱柱底面正方形对角线的长度,即 $HI=4$,$JA'=2$. 因为 $\frac{HA'}{EG}=\frac{DA'}{DG}$,所以 $DA'=4$,$DJ=2$. 因为 $\frac{BJ}{HA'}=\frac{DJ}{DA'}$,所以 $BJ=1$,$BC=2$. **故 C 正确.**

17. B 【解析】圆台上、下底面半径分别为 $r_1=1$,$r_2=2$,设母线长为 l,高为 h,球 O 的直径为 h. 因为 BC 与半圆 O 相切于点 P,则 $BP=r_1=1$,$CP=r_2=2$,所以 $l=BP+CP=3$,①**正确**;



过 B 作 $BM\perp CD$ 于 M,则 $BM=h$,$CM=r_2-r_1=1$,所以 $h=\sqrt{l^2-CM^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$,即球 O 的

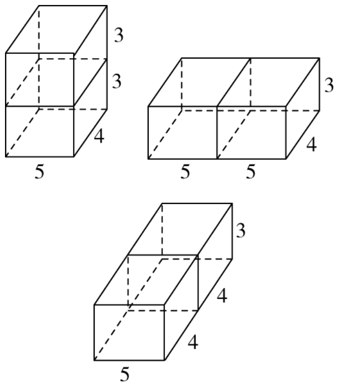
半径为$\sqrt{2}$，②**正确**；

延长 DA，CB 交于点 H，因为 $AB/\!/CD$，所以$\frac{HA}{HD}=\frac{AB}{CD}=\frac{1}{2}$，则 $HD=2HA=2AD=2h=4\sqrt{2}$，③**错误**；

过 P 作 $PQ\perp BM$ 于 Q，延长 PQ 与 AD 交于 O_1，则 P 的轨迹是以 O_1 为圆心，O_1P 为半径的圆，作 $PN\perp CD$ 于 N，得 $\triangle BQP\backsim\triangle PNC$，则 $\frac{BP}{PC}=\frac{QP}{NC}$，即 $\frac{1}{2}=\frac{O_1P-1}{2-DN}=\frac{O_1P-1}{2-O_1P}$，得 $O_1P=\frac{4}{3}$，所以点 P 的轨迹的长度是 $2\pi\times\frac{4}{3}=\frac{8\pi}{3}$，④**错误**.

故 B 正确.

18. $5\sqrt{5}$　【解析】有如下三种组合方式：



在第一种情况下，体对角线长 $l_1=\sqrt{5^2+4^2+6^2}=\sqrt{77}$；在第二种情况下，体对角线长 $l_2=\sqrt{10^2+4^2+3^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$；在第三种情况下，体对角线长 $l_3=\sqrt{5^2+8^2+3^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$. 所以大长方体对角线最长为 $5\sqrt{5}$.

易错警示　**多面体展开或者拼接时遗漏某种情况致错**

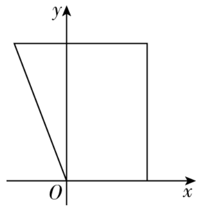
求解多面体的侧面两点间的最短距离，要注意几何体的特征，沿着不同的棱展开后可能会有不同的情况，再根据侧面展开图确定最值. 类似地，两个多面体拼接后求某条线段的长时，也要考虑不同的拼接情况，如本题.

§2　直观图

对点上分

1. C　【解析】根据该平面图形的直观图可知，该平面图形为一个直角梯形，且在直观图中平行于 y' 轴的边与底边垂直，原

图形如图所示,**故 C 正确.**



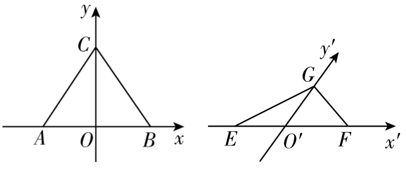
2. C 【解析】利用斜二测法画直观图时,平行于 x 轴或与 x 轴重合的线段长度不变,则 CD,PQ 长度不变,平行于 y 轴或与 y 轴重合的线段长度减半,则 OA 长度减掉一半,线段 PB,PC,QE,QD 对应线段长度也会减小. 所以 P,C,D,Q 的对应点 P',C',D',Q'画对了,A,B,E 的对应点 A',B',E'画错了. **故 C 正确.**

归纳总结 斜二测画法中,“斜”是指把直角坐标系 xOy 变成斜坐标系 $x'O'y'$,使 $\angle x'O'y' = 45°$(或 $135°$);“二测”是指画直观图时,平行(或重合)于 x 轴的线段长度不变,平行(或重合)于 y 轴的线段长度减半.

3. B 【解析】对于 B,由于直角在直观图中有的成为 45°,有的成为 135°,但直观图的平行关系依然保留,**故 B 正确;**

对于 C,梯形的直观图中平行关系一定保留,一定是梯形,**故 C 错误;**

对于 A,D,如图所示的等边三角形 ABC 中,O 为 AB 的中点,设 $AB=4$,则 $CO=2\sqrt{3}$,在直观图中,$EF=4$,$O'G=\sqrt{3}$,故 $FG=\sqrt{7-2\times2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}-1$,$EG=\sqrt{7+2\times2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}+1$,则 $\triangle EFG$ 不为等腰三角形,**故 A,D 错误.**



4. C 【解析】由比例可知,所画长方体的长、宽、高和四棱锥的高分别为 4 cm,1 cm,2 cm 和 1.6 cm.

又因为斜二测画法画直观图时,已知图形中平行(或重合)于 x 轴的线段,在直观图中平行(或重合)于 x'轴,保持长度不变;

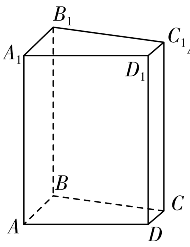
已知图形中平行(或重合)于 y 轴的线段,在直观图中平行(或重合)于 y'轴,长

度变为原来的一半；

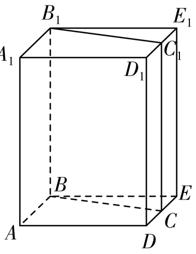
已知图形中平行(或重合)于 z 轴的线段，在直观图中平行(或重合)于 z'轴，保持长度不变，所以该建筑物按 1∶500 的比例画出它的直观图的相应尺寸分别为 4 cm，0.5 cm，2 cm 和 1.6 cm. **故 C 正确.**

5.【解】(1)结合直观图的画法，即可得到四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的直观图如图①(答案不唯一).

(2)由题意并结合长方体的几何特征，可得补成的长方体如图②，即补上的几何体是三棱柱 $B_1C_1E_1-BCE$(答案不唯一).



图①



图②

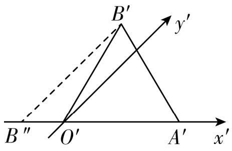
规律总结 (1)利用斜二测画法画空间几何体直观图的规则口诀：平行依旧垂改斜，横等纵半竖不变，眼见为实遮为虚，空间观感好体现.

(2)画空间几何体的直观图时，为增强立体感，被挡住的部分通常用虚线表示.

6. A

攻略上分 本题已知直观图，需先还原平面图形再计算，也可利用通法攻略 43 中的距离关系速解.

【解析】过点 B'作 $B'B''//y'$轴交 x'轴于点 B''，如图所示.

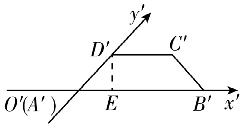


在$\triangle B'B''O'$中，$O'B'=2$，$\angle B'B''O'=45°$，$\angle B'O'B''=120°$，由正弦定理可得，$\dfrac{B'B''}{\sin 120°}=\dfrac{B'O'}{\sin 45°}$，所以 $B'B''=\dfrac{B'O'\cdot\sin 120°}{\sin 45°}=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}$，由斜二测画法可知，在原平面图形中，点 B 到 x 轴的距离是 $2B'B''=2\sqrt{6}$. **故 A 正确.**

快解 由 $O'B'=2$，$\angle B'O'A'=60°$，得 B' 到 x' 的距离 $h'=O'B'\cdot\sin 60°=\sqrt{3}$，则 B 到 x 轴的距离 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}=2\sqrt{6}$.

7. C 【解析】用斜二测画法画出的水平放置的直角梯形 $ABCD$ 的直观图 $A'B'C'D'$ 如图所示.

可知四边形 $A'B'C'D'$ 是梯形，$A'B'=4$，$A'D'=\sqrt{2}$，$D'C'=2$，且 $D'C'/\!/A'B'$，过点 D' 作 $D'E\perp A'B'$ 于点 E，由 $\angle D'A'B'=45°$，得 $D'E=1$，所以 $S_{四边形A'B'C'D'}=\dfrac{(2+4)\times 1}{2}=3$. **故 C 正确.**



快解 由已知可得 $S_{梯形ABCD}=\dfrac{1}{2}(2+4)\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，则由 $S_{直观图}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}S_{原图}$ 得 $S_{四边形A'B'C'D'}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}S_{梯形ABCD}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times 6\sqrt{2}=3$.
故 C 正确.

归纳总结 在斜二测画法中，(1) 直观图中任意一点到 x' 轴的距离都为原图形中对应点到 x 轴距离的 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 倍；(2) $S_{直观图}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}S_{原图}$.

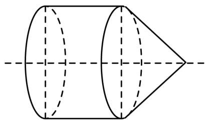
§1～§2 节测上分

1. B 【解析】圆及其内部绕直径所在直线旋转半周后所得几何体为球，而正方形及其内部绕一边的垂直平分线旋转半周后所得几何体为圆柱，故题设中的平面图形绕旋转轴旋转半周形成的几何体为一个球挖去一个圆柱，**故 B 正确.**

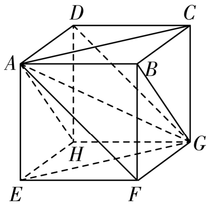
2. C 【解析】只有在平面平行于圆锥底面时，才能将圆锥截为一个圆锥和一个圆台，当平面不平行于圆锥底面时，得到的几何体并非圆锥和圆台，**故 A 错误；**
棱柱的侧棱都相等且平行，且侧面是平行四边形，但其底面多边形各边不一定相等，则侧面并不一定全等，**故 B 错误；**
圆锥的顶点、底面圆的圆心与圆锥底面圆周上任意一点的连线都可以构成直角

三角形,**故 C 正确**;

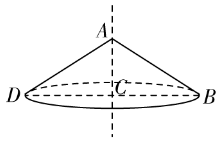
直角梯形绕下底所在直线旋转一周,所形成的几何体是由一个圆柱与一个圆锥组成的简单组合体,如图所示,**故 D 错误**.



3. C 【解析】在正方体 $ABCD-EFGH$ 中,当顶点为 A 时,三棱锥 $A-EHG$,$A-EFG$,$A-DCG$,$A-DHG$,$A-BCG$,$A-BFG$ 均为"鳖臑",所以 8 个顶点共可以形成 $8\times6=48$(个),但每个"鳖臑"都重复一次,所以"鳖臑"的个数为 $\frac{48}{2}=24$. **故 C 正确**.

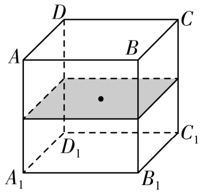


4. D 【解析】如图,在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中,$\because AC=\sqrt{3}$, $BC=3$, $\angle ACB=90°$, $\therefore AB=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$,$\therefore \angle BAC=60°$,可得圆锥轴截面的顶角为 120°. 设该圆锥任意两条母线的夹角为 θ,$0°<\theta\leqslant120°$,$\therefore$ 经过该圆锥任意两条母线的截面三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\sin\theta=6\sin\theta$,当 $\theta=90°$时,面积最大值为 6. **故 D 正确**.



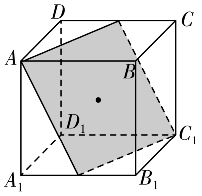
5. A 【解析】因为正方体容器中盛有容积的一半的有色溶液,所以无论怎样转动,其液面总是过正方体的中心.

对于 B,当过正方体一面上相对的两边的中点以及正方体的中心作截面时,得截面形状为正方形,即静止时液面如图①,**故 B 正确**;



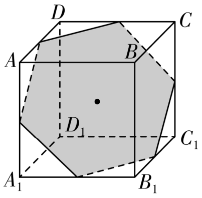
图①

对于 C，当过正方体一面上一边的中点和此边外的顶点以及正方体的中心作截面时，得截面形状为菱形，即静止时液面如图②，**故 C 正确；**



图②

对于 D，当过正方体一面上相邻两边的中点以及正方体的中心作截面时，得截面形状为正六边形，即静止时液面如图③，**故 D 正确. 故选 A.**



图③

6. A 【解析】如图所示，设该正四棱台为 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$，上、下底面中心分别为 O_1, O，分别取 BC, B_1C_1 的中点 E, F，连接 OO_1, O_1F, OE, EF，

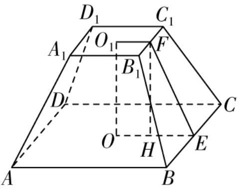
在四边形 OO_1FE 内，作 $FH\perp OE$ 交 OE 于 H，则四边形 OO_1FH 是矩形，

且 $FH=OO_1=9$，$OE=\dfrac{1}{2}AB=17.25$，

$O_1F=OH=\dfrac{1}{2}A_1B_1=16$，所以 $EH=OE-OH=1.25=\dfrac{5}{4}$.

在 Rt $\triangle FHE$ 中，$EF=\sqrt{FH^2+EH^2}=\sqrt{9^2+\left(\dfrac{5}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{1\ 321}}{4}\approx\dfrac{36.35}{4}\approx 9.1$，

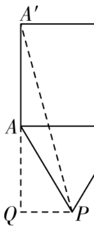
即该墩台的斜高约为 9.1 m. **故 A 正确.**



7. $-\dfrac{1}{4}$ 【解析】由已知得 $BD=\sqrt{2}AB=\sqrt{6}$，$BC=2$. 因为 D, E, F 三点重合，所以 $AE=AD=\sqrt{3}$，$BF=BD=\sqrt{6}$，则在 $\triangle ACE$ 中，由余弦定理可得 $CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle CAE=1+3-2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$，所以 $CE=CF=1$. 则在 $\triangle BCF$ 中，由余弦定理

得 $\cos\angle FCB=\dfrac{BC^2+CF^2-BF^2}{2BC\cdot CF}=\dfrac{1+4-6}{2\times1\times2}=-\dfrac{1}{4}$.

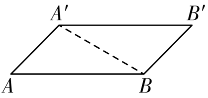
8.【解】(1)将漏斗部分表面展开,如图①所示,连接 $A'P$,



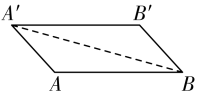
图①

由两点间线段最短可得线段 $A'P$ 为蚂蚁爬行的最短路径,过点 P 作 $PQ\perp A'A$ 交 $A'A$ 的延长线于点 Q,则 $AQ=AP\cdot\cos30°=\sqrt{3}$, $PQ=AP\cdot\sin30°=1$,在 $\mathrm{Rt}\triangle A'PQ$ 中,$A'P=\sqrt{A'Q^2+PQ^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,所以蚂蚁爬过的最短路径的长为$(\sqrt{6}+\sqrt{2})$米.

(2)正方形 $ABB'A'$的斜二测画法有以下两种:



图②



图③

如图②,$\angle A'AB=45°$,连接 $A'B$,在$\triangle A'AB$ 中,由余弦定理可得 $A'B=\sqrt{AA'^2+AB^2-2AA'\cdot AB\cdot\cos\angle A'AB}=\sqrt{1^2+2^2-2\sqrt{2}}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$;

如图③,$\angle A'AB=135°$,连接 $A'B$,在$\triangle A'AB$ 中,由余弦定理可得 $A'B=\sqrt{AA'^2+AB^2-2AA'\cdot AB\cdot\cos\angle A'AB}=\sqrt{1^2+2^2+2\sqrt{2}}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

综上所述,$A'B=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ 米或 $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ 米.

§3　空间点、直线、平面之间的位置关系

3.1　空间图形基本位置关系的认识+

3.2　刻画空间点、线、面位置关系的公理

对点上分

1. B　【解析】因为直线和平面都是由点形

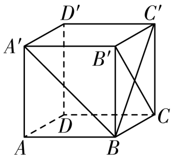
成的,所以根据元素与集合的关系知,点 A 在平面 α 内表示为 $A\in\alpha$,点 A 不在直线 l 上表示为 $A\notin l$,根据集合与集合的关系知,直线 l 在平面 α 内可表示为 $l\subset\alpha$,**故 B 正确**.

2. D 【解析】对于 A,空间中两直线的位置关系有三种:平行、相交和异面,**故 A 错误**.

对于 B,若空间中两直线没有公共点,则两直线异面或平行,**故 B 错误**.

对于 C,和两条异面直线都相交的两直线是异面直线或相交直线,**故 C 错误**.

对于 D,如图,在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,$A'B$,$B'C$,BC' 为正方体侧面的对角线,$A'B$ 与 BC' 相交,$A'B$ 与 $B'C$ 异面,故若两直线分别是正方体的相邻两个面的对角线所在的直线,则两直线可能相交,也可能异面,**故 D 正确**.



易错警示 错误理解异面直线定义致错

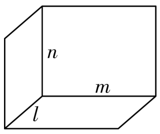
异面直线的定义是不同在任何一个平面内的两条直线,容易理解片面出现误选的情况,如将异面直线理解为“空间中不相交的两条直线”“分别位于不同平面内的两条直线”“一个平面内的一条直线和这个平面外的一条直线”都是错误的.

3. BD 【解析】a 不是与 β 内的所有直线平行,而是与 β 内的无数条直线平行,无数条直线异面,**A 错误**,**B 正确**;根据定义,a 与 β 没有公共点,**C 错误**,**D 正确**.

4. D 【解析】对于 A,当三个点共线时,可作无数个平面,所以 **A 是假命题**.

对于 B,如果这个点在这条直线上,这时有无数个平面,所以 **B 是假命题**.

对于 C,如图,l,m,n 两两相交,此时确定三个平面,所以 **C 是假命题**.



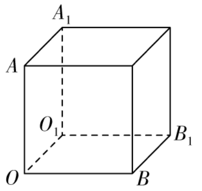
对于 D,两两平行的三条直线,可以确定一个或三个平面,所以 **D 是真命题**.

易错警示 对基本事实理解不透彻致错

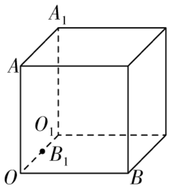
忽视基本事实 1 中的关键词"不在一条直线上",就容易错选 AB.

5. C 【解析】当 4 条直线中任何 3 条都不共面时,如四棱锥的 4 条侧棱,此时 4 条直线可以确定 6 个平面;当 4 条直线中有且仅有 3 条共面时,4 条直线可以确定 3+1=4 个平面;当 4 条直线共面时,4 条直线只可以确定 1 个平面. 4 条直线在空间中的位置关系:任何 3 条都不共面、有且仅有 3 条共面、4 条均共面,不存在其他的位置关系,**故选 C.**

6. D 【解析】在正方体中,如图①所示,$OB // O_1B_1$,如图②所示,OB 与 O_1B_1 不平行. **故 D 正确.**



图①



图②

7. ④ 【解析】对于①,这两个角相等或互补,①**错误;**

对于②③,无法判定这两个角的两边分别平行,所以无法确定这两个角的关系,②③**错误;**

对于④,根据平行线的传递性可以判断,④**正确.**

8. 75°或 105° 【解析】根据等角定理知 $\alpha=\beta$ 或 $\alpha+\beta=180°$,若 $\alpha=105°$,则 $\beta=75°$或 $105°$.

9. D 【解析】对于 A,由条件可得,$MQ // BD$,$NP // BD$,所以 $MQ // NP$,所以 M,N,P,Q 四点共面,**故 A 正确;**

对于 B,$MQ // BD$,$ME // BC$,根据等角定理,得$\angle QME=\angle DBC$,**故 B 正确;**

对于 C,由等角定理知 $\angle QME=\angle DBC$,$\angle MEQ=\angle BCD$,所以 $\triangle BCD \backsim \triangle MEQ$,**故 C 正确;**

对于 D,由三角形中位线的性质知 $MQ // BD$,$MQ=\dfrac{1}{2}BD$,$NP // BD$,$NP=\dfrac{1}{2}BD$,所以 $MQ // NP$,$MQ=NP$,所以四边形 $MNPQ$ 为平行四边形,**故 D 错误.**

10. ABC 【解析】因为在 $\triangle ABD$ 中,$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AH}{AD}=\lambda$,所以 $EH // BD$ 且 $EH=\lambda BD$. 又在

$\triangle CBD$ 中，$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\mu$，所以 $FG/\!/BD$ 且 $FG=\mu BD$，所以 $EH/\!/FG$，所以点 E,F,G,H 在由 EH 和 FG 确定的平面内，当 $\lambda=\mu$ 时，$EH=FG$，故四边形 $EFGH$ 是平行四边形，**故 A 正确，D 错误**；

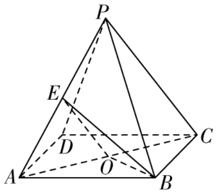
当 $\lambda\neq\mu$ 时，$EH\neq FG$，四边形 $EFGH$ 是梯形，不可能是平行四边形，**故 B，C 正确.**

11. C

攻略上分 本题利用通法攻略 44 的方法，利用三角形中位线定理构造一条与 PC 平行的直线，找到异面直线 BE 与 PC 所成角或其补角，进而计算求解.

【解析】如图，连接 AC，取 AC 的中点 O，连接 BO，EO，由题意知 $EO/\!/PC$，则异面直线 BE 与 PC 所成角为 $\angle BEO$ 或其补角.

提示：构造的角可能是钝角



在 $\triangle BOE$ 中，

$EO=\frac{1}{2}PC=1$，

$OB=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，

$BE=\frac{\sqrt{3}}{2}PA=\sqrt{3}$，

则 $\cos\angle BEO=\frac{BE^2+EO^2-BO^2}{2BE\cdot EO}=\frac{3+1-2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故异面直线 BE 与 PC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，**故 C 正确.**

规律方法 平移线段法是求异面直线所成角的常用方法，其基本思路是通过平移直线，把异面直线问题转化为共面直线问题来解决，具体步骤如下：

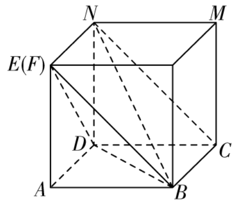
(1)平移：平移异面直线中的一条或两条，作出异面直线所成的角(或其补角)；

(2)计算：求该角的值，常利用解三角形；

(3)取舍：由异面直线所成角的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，当所作的角为钝角时，应取它的补角作为异面直线所成的角.

12. A 【解析】题中正方体的平面开图所对应的正方体如图所示，其中点 E,F 重

合. 不妨设正方体的棱长为 1. BN 与 CN 所成角为 $\angle BNC$, 易知 $CN=\sqrt{2}$, $BN=\sqrt{3}$, $\cos\angle BNC=\frac{CN}{BN}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\neq\frac{1}{2}$, 即 $\angle BNC\neq\frac{\pi}{3}$, **D 错误**;



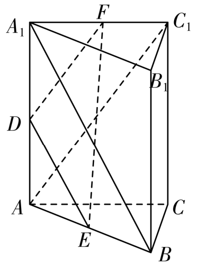
$AB/\!/CD$, 则 AB 与 CN 所成角为 $\angle NCD=\frac{\pi}{4}$, **B 错误**;

因为 $BC/\!/AD/\!/FN$, $BC=AD=FN$, 所以四边形 $BCNF$ 为平行四边形, $BF/\!/CN$, **C 错误**;

DE 与 CN 所成角为 $\angle BED$, 而 $BE=BD=DE=\sqrt{2}$, 则 $\angle BED=\frac{\pi}{3}$, 因此与 CN 所成角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线是 DE, **故 A 正确.**

名师点拨 求异面直线所成的角, 核心是通过平移或者构造等方法将异面直线所成的角转化成同一平面内的两条直线的夹角, 放到同一个可解的三角形中求解. 要注意多平面平移, 不能局限于一个平面.

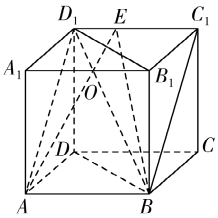
13. B 【解析】如图, 分别取 AA_1, AB, A_1C_1 的中点 D, E, F, 连接 DE, DF, EF, 则 $DE/\!/A_1B$, $DF/\!/AC_1$, 故异面直线 A_1B 和 AC_1 所成的角为 $\angle FDE$ 或其补角. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=3$, $AA_1=4$, 则 $DE=\frac{1}{2}A_1B=\frac{5}{2}$, $DF=\frac{1}{2}AC_1=\frac{5}{2}$, $EF=\sqrt{4^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{73}}{2}$. 在 $\triangle DEF$ 中, 由余弦定理得 $\cos\angle FDE=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{73}}{2}\right)^2}{2\times\left(\frac{5}{2}\right)^2}=-\frac{23}{50}$. 因为异面直线 A_1B 和 AC_1 所成角的范围是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, 所以异面直线 A_1B 和 AC_1 所成角的余弦值为 $\frac{23}{50}$. **故 B 正确.**



14. B 【解析】连接 AD_1,BC_1,BD_1,BE. $\because O\in$ 直线 AE, $AE\subset$ 平面 ABC_1D_1, $\therefore O\in$ 平面 ABC_1D_1. 又 $\because O\in$ 平面 BB_1D_1D, 平面 $ABC_1D_1\cap$ 平面 $BB_1D_1D=BD_1$, $\therefore O\in$ 直线 BD_1, $\therefore$ 点 D_1,O,B 共线.

$\because AB//D_1C_1$, $\therefore \triangle ABO\backsim\triangle ED_1O$,

$\therefore OB:OD_1=AB:ED_1=3:1$, $\therefore OB=3OD_1$. **故 B 正确.**

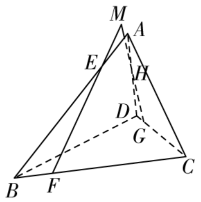


归纳总结 **证明点共线的两种方法**

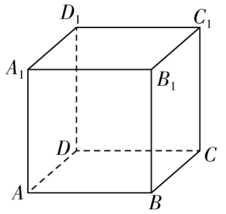
（1）先找出两个平面，然后证明这些点都是这两个平面的公共点，根据基本事实 3 可知这些点都在这两个平面的交线上；

（2）选择其中两点确定一条直线，然后证明其他点也在这条直线上.

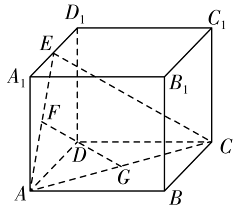
15. A 【解析】如图，因为 $EF\subset$ 平面 ABC, $GH\subset$ 平面 ACD，所以点 $M\in$ 平面 ABC，且 $M\in$ 平面 ACD，而平面 $ABC\cap$ 平面 $ACD=AC$，所以点 $M\in$ 直线 AC. 若 $M\in$ 直线 BD，那么直线 AC 和 BD 有交点，是共面直线，这与几何体 $A-BCD$ 是三棱锥矛盾，所以 $M\notin$ 直线 BD. **故 A 正确.**



16. D 【解析】如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AA_1,AB,AD 两两相交，但 AA_1,AB,AD 不共面. AB,AD,BC 都在平面 $ABCD$ 中，但 AD,BC 不相交. 所以"a,b,c 两两相交"是"a,b,c 共面"的既不充分也不必要条件. **故 D 正确.**



17. C 【解析】如图,连接 AG,则 G 在 AC 上且 G 为 AC 中点. 因为 F,G 分别为 AE,AC 中点,所以由三角形的中位线定理可知,$CE//FG$,所以 C,E,F,G 四点共面,**故 B,D 错误**,**C 正确**. 因为 $CA\cap EA=A$,所以 $CG\cap EF=A$,**故 A 错误**.



18.【证明】(1)因为 E,F 分别为 AB,BC 的中点,所以 $EF//AC$. 又因为$\frac{CG}{GD}=\frac{AH}{HD}$,所以 $GH//AC$,所以 $EF//GH$,所以 E,F,G,H 四点共面.

(2)因为 E,F 分别为 AB,BC 的中点,所以 $EF//AC,EF=\frac{1}{2}AC$.

由题意知 $\frac{CG}{GD}=\frac{AH}{HD}=2$,所以 $HG//AC$,$HG=\frac{1}{3}AC$,所以四边形 $EFGH$ 为梯形,直线 EH 和 FG 必相交,设交点为 M,即 $EH\cap FG=M$.

因为 $EH\subset$平面 ABD,所以点 $M\in$平面 ABD,同理可得点 $M\in$平面 BCD.

又因为平面 $ABD\cap$平面 $BCD=BD$,所以点 $M\in$直线 BD,所以直线 EH,FG,BD 三线共点.

§3 节测上分

1. C 【解析】对于 A,$A\in\alpha,A\in\beta,B\in\alpha,B\in\beta$,根据直线上有两个点在平面内,则这条直线在这个平面内,可得 $a\subset\beta$,**故 A 正确**;

对于 B,$M\in\alpha,M\in\beta,N\in\alpha,N\in\beta$,根据直线上有两个点在平面内,则这条直线在这个平面内,可得直线 $MN\subset\alpha$,直线 $MN\subset\beta$,**故 B 正确**;

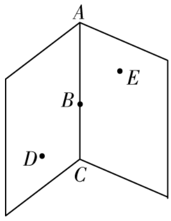
对于 C,由 $A\in\alpha,A\in\beta$,知平面 α 和平面 β 相交于一条经过点 A 的直线,**故 C 错误**;

对于 D,$A,B,M\in\alpha,A,B,M\in\beta$,且 A,B,

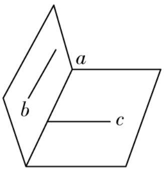
M 不共线,根据不共线的三点确定一个平面,可得 α,β 重合,**故 D 正确.**

2. A 【解析】对于 A,如果有三点共线,那么共线三点所在直线与直线外一点共面,这与“不共面的四点”矛盾,**故 A 为真命题;**

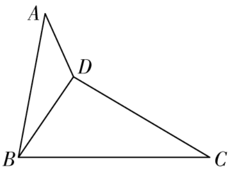
对于 B,若点 A,B,C,D 共面,点 A,B,C,E 共面,则 A,B,C,D,E 可能不共面,如图①,平面 $ABCE$ 与平面 $ABCD$ 相交于 A,B,C 所在直线,$E\notin$ 平面 $ABCD$,**故 B 为假命题;**



图①



图②



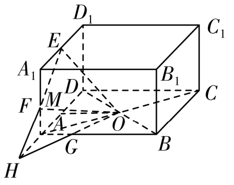
图③

对于 C,如图②,直线 a,b 共面,直线 a,c 共面,但直线 b,c 不共面,**故 C 为假命题;**

对于 D,如图③,空间四边形 $ABCD$ 的四条边相等,但不是菱形,**故 D 为假命题.**

3. CD 【解析】由题意可知 M 为 DD_1 的中点,故 $DD_1\cap C_1M=M$,$C_1M\cap CC_1=C_1$,故 DD_1,CC_1 均与 C_1M 相交,**A,B 错误.** $BD_1\cap$ 平面 $CC_1D_1D=D_1$,$C_1M\subset$ 平面 CC_1D_1D,$D_1\notin$ 直线 C_1M,则直线 BD_1 与 C_1M 为异面直线,同理可说明 CA_1 与直线 C_1M 为异面直线,**故 C,D 正确.**

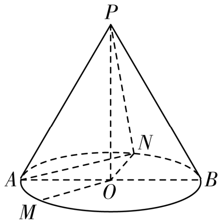
4. B 【解析】延长 EF 交 DA 的延长线于 H,连接 HO 交 AB 于 G.



$\because H\in EF,EF\subset$ 平面 EOF,$H\in AD,AD\subset$ 平面 $ABCD$,平面 $EOF\cap$ 平面 $ABCD=l$,$\therefore H\in l$,又 $O\in$ 平面 EOF,$O\in$ 平面 $ABCD$,$\therefore O\in l$,故直线 OH 即为直线 l. 取 AD 的中点 M,连接 MO,易知 $\triangle AHF\cong\triangle A_1EF$,$\therefore AH=A_1E=AM$,$\therefore AG=\dfrac{1}{2}MO=$

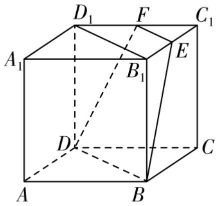
$\frac{1}{4}AB$，$BG=\frac{3}{4}AB$，$\therefore AG=\frac{1}{3}GB$，即 $k=\frac{1}{3}$. 故 B 正确.

5. D　【解析】如图，过点 A 作 $AN//OM$，交圆 O 于点 N，连接 ON，PN，则 $\angle PAN$ 即为异面直线 OM 与 AP 所成的角或其补角. 设 $AO=ON=1$，可知 $\angle OAN=\angle ONA=60°$，则 $AN=1$. 因为轴截面 PAB 为等边三角形，所以 $PA=PN=2$. 在 $\triangle APN$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle PAN=\frac{PA^2+AN^2-PN^2}{2PA\cdot AN}=\frac{4+1-4}{2\times2\times1}=\frac{1}{4}$，所以异面直线 OM 与 AP 所成角的余弦值为 $\frac{1}{4}$. 故 D 正确.

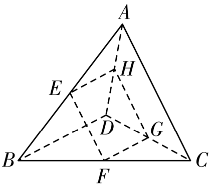


6. 120°　【解析】因为 A'，B' 分别是 AD，DB 的中点，所以 $A'B'//a$，同理 $C'D'//a$，$B'C'//b$，$D'E'//b$，所以 $A'B'//C'D'$，$B'C'//D'E'$，所以 $\overrightarrow{B'A'}//\overrightarrow{D'C'}$，$\overrightarrow{B'C'}//\overrightarrow{D'E'}$，根据等角定理有 $\angle C'D'E'=\angle A'B'C'=120°$.

7. 18　【解析】取 C_1D_1 的中点 F，连接 EF，DF，B_1D_1，BD，BE. 因为 E 为 B_1C_1 的中点，所以 $EF//B_1D_1$，$EF=\frac{1}{2}B_1D_1$. 因为 $BD//B_1D_1$，$BD=B_1D_1$，所以 $EF//BD$，$EF=\frac{1}{2}BD$，所以 B，D，E，F 四点共面，即过 B，D，E 三点的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面为梯形 $BDFE$. 因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，所以 $EF=2\sqrt{2}$，$BD=4\sqrt{2}$，$BE=DF=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，所以等腰梯形 $BDFE$ 的高为 $\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$，所以梯形 $BDFE$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times3\sqrt{2}=18$.



8.【解】如图，连接 AC，EH，HG，GF，FE.



$\because E,F,G,H$ 分别为 AB,BC,CD,AD 的中点，$\therefore EH$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线，FG 是 $\triangle BCD$ 的中位线，$\therefore EH=FG=\frac{1}{2}BD$，$EH/\!/BD/\!/FG$，$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

当 $AC\perp BD$ 时，四边形 $EFGH$ 为矩形；当 $AC=BD$ 时，四边形 $EFGH$ 为菱形；当 $AC=BD$ 且 $AC\perp BD$ 时，四边形 $EFGH$ 为正方形.

§4 平行关系

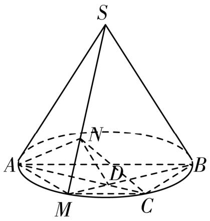
4.1 直线与平面平行

对点上分

1. C 【解析】当 $m/\!/l$ 时，m 可能在 α 内或者 β 内，故不能推出 $m/\!/\beta$ 且 $m/\!/\alpha$，所以充分性不成立；当 $m/\!/\beta$ 且 $m/\!/\alpha$ 时，设存在直线 n 满足 $n\subset\alpha$，$n\not\subset\beta$，且 $n/\!/m$，因为 $m/\!/\beta$，所以 $n/\!/\beta$，根据直线与平面平行的性质定理，可知 $n/\!/l$，所以 $m/\!/l$，即必要性成立，故“$m/\!/l$”是“$m/\!/\beta$ 且 $m/\!/\alpha$”的必要不充分条件，**故 C 正确.**

2. C 【解析】由于几何体 $A_1B_1C_1-ABC$ 是三棱台，则 $AB/\!/A_1B_1$，又 $AB\not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，$A_1B_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AB/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1$. 当 $AB\subset$ 平面 α，平面 $\alpha\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=m$ 时，由直线与平面平行的性质定理可知 $m/\!/AB$，**故 C 正确.**

3. B 【解析】连接 MB 交 AC 于点 D，连接 ND,NA,NC，则平面 NAC 即为平面 α.



因为 $SB/\!/\alpha$，平面 $SMB\cap\alpha=DN$，$SB\subset$ 平面 SMB，所以 $SB/\!/DN$. 因为 AB 为底面圆的直径，点 M,C 将弧 AB 三等分，连接 AM,CM，所以 $\angle ABM=\angle BMC=\angle MBC=\angle BAC=30^\circ$，$MC=BC=\frac{1}{2}AB$，所以 $MC/\!/$

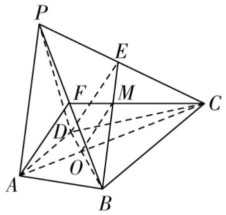
AB，所以$\frac{DM}{DB}=\frac{MC}{AB}=\frac{1}{2}$. 又 $SB/\!/DN$，所以 $\frac{MN}{SN}=\frac{DM}{DB}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{SM}{SN}=\frac{3}{2}$. **故 B 正确.**

4.【证明】连接 AC，FC，设 $AC\cap BD=O$，$FC\cap BE=M$，连接 OM，如图.

$\because AF/\!/$平面 BDE，$AF\subset$平面 AFC，平面 $AFC\cap$平面 $BDE=OM$，$\therefore AF/\!/OM$.

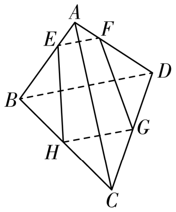
$\because AD/\!/BC$，$AD=\frac{1}{2}BC$，$\therefore \frac{AO}{OC}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{FM}{MC}=\frac{AO}{OC}=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 点 M 是$\triangle PBC$ 的重心，$\therefore$ 点 E 是 PC 的中点，$\therefore \frac{EM}{MB}=\frac{1}{2}=\frac{DO}{OB}$，$\therefore OM/\!/DE$，$\therefore AF/\!/DE$.



5. D 【解析】若直线 l 平行于平面 α 内的无数条直线，当这无数条直线是平行线时，l 可能在平面内，与 α 不一定平行，**故 A 不正确**；若直线 a 在平面 α 外，则 $a/\!/\alpha$ 或 a 与 α 相交，**故 B 不正确**；若直线 $a/\!/b$，$b\subset\alpha$，则 $a/\!/\alpha$ 或 $a\subset\alpha$，**故 C 不正确**；若直线 $a/\!/b$，$b\subset\alpha$，则 $a/\!/\alpha$ 或 $a\subset\alpha$，$\therefore a$ 平行于平面 α 内的无数条直线，**故 D 正确.**

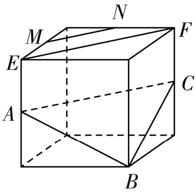
6. B 【解析】在平面 ABD 内，$\because AE:EB=AF:FD=1:3$，$\therefore EF/\!/BD$. 又 $BD\subset$平面 BCD，$EF\not\subset$平面 BCD，$\therefore EF/\!/$平面 BCD. 又在平面 BCD 内，H，G 分别是 BC，CD 的中点，$\therefore HG/\!/BD$，$\therefore HG/\!/EF$. 又$\frac{EF}{BD}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{4}$，$\frac{HG}{BD}=\frac{CH}{BC}=\frac{1}{2}$，$\therefore EF\neq HG$. 在四边形 $EFGH$ 中，$EF/\!/HG$ 且 $EF\neq HG$，$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为梯形. **故 B 正确.**



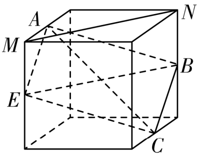
7. D

攻略上分 本题为判断线面平行问题，可利用通法攻略 46 求解. 前三个选项均先证明线线平行，再利用线面平行的判定定理求解.

【解析】对于 A,如图①所示,连接 EF,易得 $AC\parallel EF$, $MN\parallel EF$, 则 $MN\parallel AC$, 又 $MN\not\subset$ 平面 ABC, $AC\subset$ 平面 ABC, 所以 $MN\parallel$平面 ABC,**故 A 满足**;



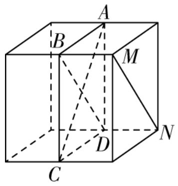
图①



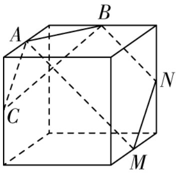
图②

对于 B,如图②所示,E 为所在棱的中点,连接 EA, EC, EB, 则易知 $AE=BC$, $AE\parallel BC$,所以四边形 $ABCE$ 为平行四边形,则 A, B, C, E 四点共面,又易知 $MN\parallel BE$, $MN\not\subset$ 平面 ABC, $BE\subset$ 平面 ABC, 所以 $MN\parallel$平面 ABC,**故 B 满足**;

对于 C,如图③所示,D 为所在棱的中点,连接 DA, DC, DB, 则四边形 $ABCD$ 为平行四边形,A, B, C, D 四点共面,且易知 $MN\parallel BD$, 又 $MN\not\subset$平面 ABC, $BD\subset$平面 ABC,所以 $MN\parallel$平面 ABC,**故 C 满足**;



图③

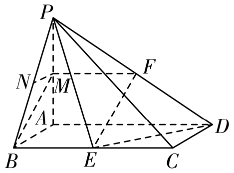


图④

对于 D,如图④所示,连接 AM, BN,由已知及正方体的性质可知四边形 $AMNB$ 是等腰梯形,所以 AB 与 MN 所在的直线相交,又 $AB\subset$平面 ABC,故不能推出 MN 与平面 ABC 平行,**故 D 不满足. 故选 D.**

8.【证明】(1)因为 M, N 分别是 PA, PB 的中点,所以 $MN\parallel AB$. 在平行四边形 $ABCD$ 中,$AB\parallel CD$,所以 $MN\parallel CD$,即 M, N, C, D 四点共面.

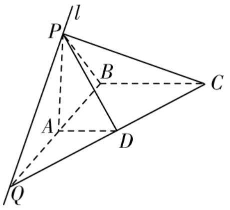
(2)取 PD 的中点 F,连接 MF, EF,如图. 因为 M, F 分别是 PA, PD 的中点,所以 $MF\parallel AD$,且 $MF=\frac{1}{2}AD$. 又因为在平行四边形 $ABCD$ 中,$BE\parallel AD$,且 $BE=\frac{1}{2}AD$,所以 $MF\parallel BE$, 且 $MF=BE$, 所以四边形 $MFEB$ 是平行四边形,所以 $BM\parallel EF$. 因为 $BM\not\subset$平面 PED, $EF\subset$平面 PED,所以 $BM\parallel$平面 PED.



归纳总结 利用线面平行的判定定理时，一定要说明“平面外一条直线”与“此平面内的一条直线”平行，即本题证明过程中的“$BM\not\subset$平面 PED”“$EF\subset$平面 PED”“$BM// EF$”三者缺一不可.

9.【解】当点 E 是线段 PB 的中点时，可使 $l//$平面 ADE，理由如下：

延长 BA，CD 相交于点 Q，连接 PQ，则直线 PQ 就是直线 l，图形如下：

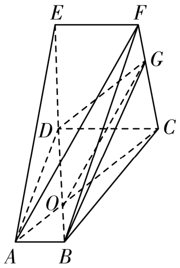


又$\triangle QAD\backsim\triangle QBC$，则$\dfrac{QA}{QB}=\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{1}{2}$，则 A 为 BQ 的中点，又 E 是 PB 的中点，连接 AE，DE（图略），$\therefore AE// l$. 又 $AE\subset$平面 ADE，$l\not\subset$平面 ADE，$\therefore l//$平面 ADE. 故当点 E 是线段 PB 的中点时，可使 $l//$平面 ADE.

10.【证明】(1) 连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OG. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$DC// AB$，$DC=2AB$，$\therefore \dfrac{BO}{OD}=\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{AO}{OC}$，又$\because GC=2FG$，$\dfrac{CG}{GF}=\dfrac{CO}{OA}$，$\therefore AF// OG$.

$\because OG\subset$平面 BDG，$AF\not\subset$平面 BDG，

$\therefore AF//$平面 BDG.



(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AB// CD$，又$\because CD\subset$平面 $CDEF$，$AB\not\subset$平面 $CDEF$，$\therefore AB//$平面 $CDEF$.

$\because AB\subset$平面 $ABFE$，平面 $CDEF\cap$平面 $ABFE=EF$，$\therefore AB// EF$.

能力上分

1. D 【解析】设平面 PAB 内存在直线 m 与 DC 平行，因为 $DC\not\subset$ 平面 PAB，$m\subset$ 平面 PAB，所以 $DC//$ 平面 PAB，又 $DC\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAB=AB$，所以 $DC//AB$，与题干矛盾，即在平面 PAB 内不存在直线与 DC 平行，**故①正确**；

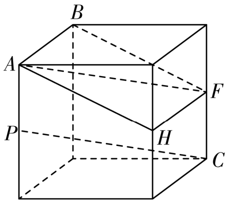
设平面 $PAB\cap$ 平面 $PDC=l$，则 $l\subset$ 平面 PAB，所以在平面 PAB 内存在无数条直线与直线 l 平行，这无数条直线与平面 PDC 平行，**故②正确**；

设平面 PAB 与平面 PDC 的交线 $l//$ 平面 $ABCD$，又 $l\subset$ 平面 PAB，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，所以 $l//AB$，同理可得 $l//CD$，则 $AB//CD$，与题干矛盾，即平面 PAB 与平面 PDC 的交线与底面 $ABCD$ 不平行，**故③正确. 故选 D.**

2. C

攻略上分 本题考查了正方体的截面问题，具体可见通法攻略 45.

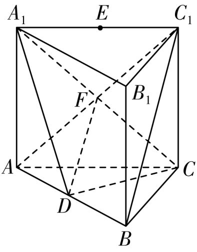
【解析】如图，设 H，F 为所在棱的中点，连接 AH，HF，FB，AF.



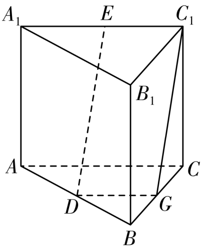
易知四边形 $APCF$ 为平行四边形，所以 $AF//PC$，又 $AF\subset$ 平面 $ABFH$，$PC\not\subset$ 平面 $ABFH$，所以 $PC//$ 平面 $ABFH$，则平面 $ABFH$ 为平面 α，平面 α 截正方体所得图形为四边形 $ABFH$.

因为正方体棱长为 2，所以 $AH=BF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$AB=HF=2$，$AF=PC=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$，所以 $AH^2+HF^2=AF^2$，则 $AH\perp HF$，又 $AB//HF$，$AB=HF$，所以四边形 $ABFH$ 为矩形，所以 $S_{四边形ABFH}=AH\cdot HF=\sqrt{5}\times2=2\sqrt{5}$. **故选 C.**

3. AB 【解析】对于 A，如图①，连接 AC_1，交 A_1C 于点 F，连接 DF，则点 F 是 AC_1 的中点，因为 D 是 AB 的中点，所以 $DF//BC_1$，又 $DF\subset$ 平面 A_1DC，$BC_1\not\subset$ 平面 A_1DC，所以 $BC_1//$平面 A_1DC，**故 A 正确.**



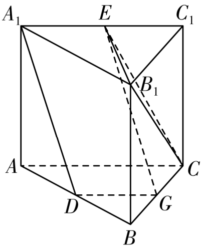
图①



图②

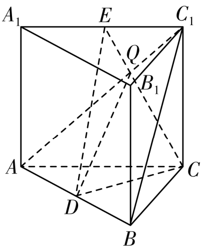
对于 B，如图②，取 BC 的中点 G，连接 DG，C_1G，因为 D 是 AB 的中点，所以 $DG//AC$，且 $DG=\frac{1}{2}AC$，又 $EC_1=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}AC$，$EC_1//AC$，所以 $DG//EC_1$，$DG=EC_1$，所以四边形 DGC_1E 是平行四边形，所以 $DE//C_1G$，又 $DE\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$C_1G\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $DE//$ 平面 BCC_1B_1，**故 B 正确.**

对于 C，如图③，取 BC 的中点 G，连接 DG，EG，因为 D 是 AB 的中点，所以 $DG//AC$，且 $DG=\frac{1}{2}AC$，又 $A_1E=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}AC$，$A_1E//AC$，所以 $DG//A_1E$，$DG=A_1E$，所以四边形 $DGEA_1$ 是平行四边形，所以 $A_1D//EG$，显然 EG 与平面 B_1EC 相交，**故 C 错误.**



图③

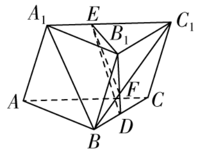
对于 D，如图④，连接 AC_1 交 EC 于点 Q，连接 DQ，则平面 $ABC_1\cap$ 平面 $CDE=DQ$，若 $BC_1//$ 平面 CDE，$BC_1\subset$ 平面 ABC_1，则 $DQ//BC_1$，由于 D 是 AB 的中点，所以点 Q 是 AC_1 的中点，而显然点 Q 不是 AC_1 的中点，矛盾，**故 D 错误.**



图④

4. $\frac{1}{2}$ **【解析】**如图，连接 BC_1 交 B_1D 于点

F,连接 EF.



因为平面 $A_1BC_1\cap$ 平面 $B_1DE=EF$, $A_1B\subset$ 平面 A_1BC_1,所以 $A_1B/\!/EF$,所以 $\frac{A_1E}{EC_1}=\frac{BF}{FC_1}$.

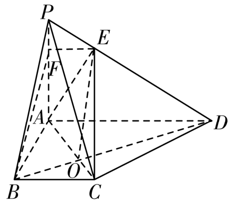
因为 $BC/\!/B_1C_1$,易知 $\triangle BDF\backsim\triangle C_1B_1F$,所以 $\frac{BF}{C_1F}=\frac{BD}{C_1B_1}$.

因为 D 是 BC 的中点,所以 $\frac{BD}{B_1C_1}=\frac{1}{2}$,所以 $\frac{A_1E}{EC_1}=\frac{1}{2}$.

易错警示 **作辅助线或构造辅助平面不当致错**

本题易出现作辅助线或构造辅助平面不当,无法由线面平行推出线线平行,从而出现猜想答案且答案不正确的情况. 直线与平面平行的性质定理可以作为直线与直线平行的判定方法,对线面平行的判定定理和性质定理要灵活应用.

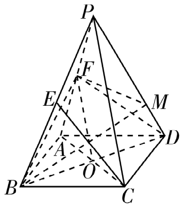
5.【**证明**】(1)连接 BD 交 AC 于点 O,连接 EO. 因为 $AD/\!/BC$,且 $AD=2BC$,所以 $\frac{BO}{DO}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$. 又 $PD=3PE$,则 $\frac{PE}{DE}=\frac{1}{2}=\frac{BO}{DO}$,所以 $PB/\!/EO$. 因为 $PB\not\subset$ 平面 ACE, $EO\subset$ 平面 ACE,所以 $PB/\!/$平面 ACE.



(2)因为 $AD/\!/BC$, $AD\not\subset$ 平面 $BCEF$, $BC\subset$ 平面 $BCEF$,所以 $AD/\!/$平面 $BCEF$. 又 $AD\subset$ 平面 PAD,平面 $PAD\cap$ 平面 $BCEF=EF$,所以 $EF/\!/AD$,则 $\frac{PF}{PA}=\frac{PE}{PD}=\frac{1}{3}$,即 $AF=2PF$.

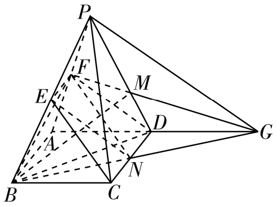
6. (1)【**证明**】如图①,连接 AC 交 BD 于 O,连接 OF,因为在 $\triangle PAC$ 中, F 为 PA 中点, O 为 AC 中点,所以 $PC/\!/FO$.

又 $PC\not\subset$ 平面 BFD, $FO\subset$ 平面 BFD,故 $PC/\!/$平面 BFD.



图①

(2)【解】存在,如图②,延长 FM 交 AD 延长线于点 G,连接 BG 交 CD 于点 N,连接 EF,FN,PG,EN.



图②

易知 $EF/\!/CN$,所以 E,F,N,C 四点共面.

又 $EC/\!/$平面 BFM,$EC\subset$平面 $EFNC$,平面 $BFM\cap$平面 $EFNC=FN$,则 $EC/\!/FN$,则四边形 $EFNC$ 为平行四边形,可得 $EF=CN=\dfrac{1}{2}CD$,故 N 为 CD 中点.

则 $\triangle BCN\cong\triangle GDN$,则 N 为 BG 的中点.

则 EN 为 $\triangle PBG$ 的中位线,则 $EN/\!/PG$,$EN=\dfrac{1}{2}PG$.

又 $EF=DN$,$EF/\!/DN$,则四边形 $EFDN$ 为平行四边形,则 $EN/\!/FD$.

从而 $FD/\!/PG$,$\triangle FMD\backsim\triangle GMP$,故 $\dfrac{PM}{MD}=\dfrac{PG}{FD}=\dfrac{PG}{EN}=2$.

4.2　平面与平面平行

对点上分

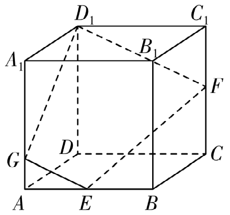
1. B　【解析】若 $\alpha/\!/\beta$,$\alpha\cap\gamma=l$,$\beta\cap\gamma=m$,则由平面平行的性质定理得 $l/\!/m$;

但当 $l/\!/m$,$\alpha\cap\gamma=l$,$\beta\cap\gamma=m$ 时,可能有 $\alpha/\!/\beta$,也可能有 α,β 相交,如 l,m 是三棱柱的两条侧棱所在直线,γ 是 l,m 确定的平面,另两个侧面所在平面分别为 α,β,此时符合条件,而 α,β 相交,所以“$l/\!/m$”是“$\alpha/\!/\beta$”的必要不充分条件. **故 B 正确.**

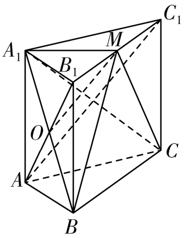
2. BD　【解析】连接 AB,CD(图略).当 P 在平面 α 与平面 β 之间时,$\because\ \alpha/\!/\beta$,平面 $PCD\cap\alpha=AB$,平面 $PCD\cap\beta=CD$,$\therefore AB/\!/CD$,可得 $\dfrac{PA}{AC}=\dfrac{PB}{BD}$,$\because\ PA=6,AC=9,PD=8$,$\therefore\ \dfrac{6}{9}=\dfrac{BD-8}{BD}$,解得 $BD=24$.当 P 在平

面 α 与平面 β 的同侧时，同理可得 $\frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PD}$，$\because PA=6, AC=9, PD=8$，$\therefore \frac{6}{15}=\frac{PB}{8}$，解得 $PB=\frac{16}{5}$，$\therefore BD=PD-PB=\frac{24}{5}$. 综上所述，可得 BD 的长为 $\frac{24}{5}$ 或 24. **故 BD 正确.**

3. C 【解析】因为平面 $ABB_1A_1 /\!/$ 平面 CDD_1C_1，平面 $EFD_1 \cap$ 平面 $CDD_1C_1=D_1F$，平面 $EFD_1 \cap$ 平面 $ABB_1A_1=GE$，所以 $D_1F /\!/ GE$. 易知 $AA_1 /\!/ CC_1$，$AB /\!/ C_1D_1$，故 $\triangle AGE \backsim \triangle C_1FD_1$，因为 E, F 分别是棱 AB, CC_1 的中点，设正方体的棱长为 2，则 $AE=1$，故 $\frac{C_1F}{C_1D_1}=\frac{GA}{AE}=\frac{1}{2}$，故 $AG=\frac{1}{2}$，则 $A_1G=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $\overrightarrow{A_1G}=3\overrightarrow{GA}$，故 $\lambda=3$. **故 C 正确.**

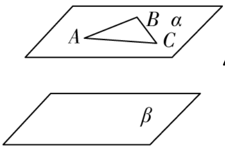


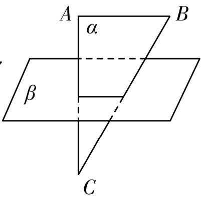
4.【证明】(1) 如图，连接 AB_1 与 A_1B 交于点 O，连接 OM. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ABB_1A_1 为平行四边形，所以 O 为 AB_1 的中点. 又因为 M 为 B_1C_1 的中点，所以 $OM /\!/ AC_1$. 因为 $OM \subset$ 平面 A_1BM，$AC_1 \not\subset$ 平面 A_1BM，所以 $AC_1 /\!/$ 平面 A_1BM.



(2) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1B_1C_1 /\!/$ 平面 ABC. 因为平面 $A_1BM \cap$ 平面 $ABC=l$，平面 $A_1BM \cap$ 平面 $A_1B_1C_1=A_1M$，所以 $l /\!/ A_1M$. 因为 $A_1M \subset$ 平面 A_1MC，$l \not\subset$ 平面 A_1MC，所以 $l /\!/$ 平面 A_1MC.

5. CD 【解析】对于 A，α 内不共线的三点到 β 的距离都相等，可得 $\alpha /\!/ \beta$ 或 α 与 β 相交，如图，**故 A 错误；**





对于 B，a，b 是 α 内的两条直线，且 $a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$，若 a 与 b 相交，则 $\alpha/\!/\beta$，若 $a/\!/b$，则不一定有 $\alpha/\!/\beta$，**故 B 错误**；

对于 C，因为 a，b 是两条相交直线，故过 a，b 有唯一平面 γ，由 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$，得 $\gamma/\!/\alpha$，又因为 $a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$，所以 $\gamma/\!/\beta$，故 $\alpha/\!/\beta$，**故 C 正确**；

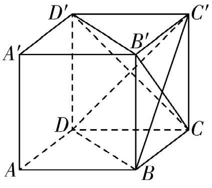
对于 D，过直线 b 作平面 γ' 交平面 α 于直线 c（图略），因为 $b/\!/\alpha$，所以 $b/\!/c$，因为 $b/\!/\beta$，$c\not\subset\beta$，所以 $c/\!/\beta$，因为 a，b 是异面直线，所以 a，c 是异面直线，在 c 上取一点 A，过点 A 在平面 α 内作直线 $a'/\!/a$，则 $a'/\!/\beta$，$a'\subset\alpha$，$c\subset\alpha$，$a'\cap c=A$，所以 $\alpha/\!/\beta$，**故 D 正确.**

6. B 【解析】对于 A，如图①，BC' 与 $B'C$ 相交，截面 BDC' 与截面 $B'D'C$ 相交，**A 错误**；

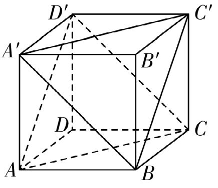
对于 B，如图②，由 $A'D'/\!/AD/\!/BC$，$A'D'=AD=BC$，得四边形 $BCD'A'$ 为平行四边形，则 $A'B/\!/D'C$，又 $A'B\subset$ 平面 $A'BC'$，$D'C\not\subset$ 平面 $A'BC'$，则 $D'C/\!/$ 平面 $A'BC'$，同理可证 $AC/\!/$ 平面 $A'BC'$，又 $AC\cap D'C=C$，AC，$D'C\subset$ 平面 ACD'，所以平面 $A'BC'/\!/$ 平面 ACD'，**B 正确**；

对于 C，如图③，截面 $B'D'D$ 与 BDA' 有公共点 D，所以截面 $B'D'D$ 与 BDA' 相交，**C 错误**；

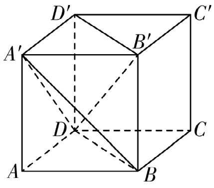
对于 D，如图④，$A'D$ 与 AD' 相交，截面 $A'DC'$ 与 $AD'C$ 相交，**D 错误. 故选 B.**



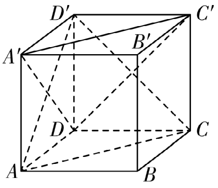
图①



图②



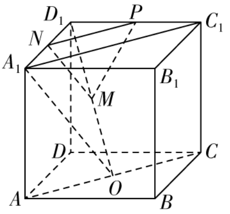
图③



图④

7.【证明】(1)连接 A_1O,因为 M,N 分别是 OD_1,A_1D_1 的中点,所以 $MN//A_1O$.

因为 $MN\not\subset$ 平面 ACC_1A_1, $A_1O\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $MN//$平面 ACC_1A_1.



(2)因为 N,P 分别是 A_1D_1,C_1D_1 的中点,所以 $NP//A_1C_1$.

因为 $NP\not\subset$ 平面 ACC_1A_1, $A_1C_1\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $NP//$平面 ACC_1A_1. 又 $MN//$平面 ACC_1A_1, $MN\cap NP=N$, $MN,NP\subset$平面 MNP,所以平面 $MNP//$平面 ACC_1A_1.

8.【证明】(1)在$\triangle PCD$ 中,由 M,N 分别为 PC,DC 的中点,可得 $MN//PD$.

在平行四边形 $ABCD$ 中,由 N,Q 分别为 CD,AB 的中点,可得 $NQ//AD$.

因为 $MN\not\subset$平面 PAD, $NQ\not\subset$平面 PAD,且 $PD\subset$平面 PAD, $AD\subset$平面 PAD,所以 $MN//$平面 PAD, $NQ//$平面 PAD.

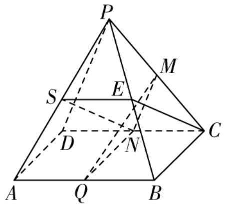
又因为 $MN\cap NQ=N$ 且 $MN,NQ\subset$平面 MNQ,所以平面 $MNQ//$平面 PAD.

(2)取 PB 的中点 E,连接 SE,EC.

在$\triangle PAB$ 中,因为 S,E 分别为 PA,PB 的中点,所以 $SE//AB$ 且 $SE=\frac{1}{2}AB$.

又因为 N 为 DC 的中点,所以 $CN//AB$ 且 $CN=\frac{1}{2}AB$,所以 $SE//CN$ 且 $SE=CN$,所以四边形 $SECN$ 为平行四边形,所以 $SN//CE$.

因为 $SN\not\subset$平面 PBC, $CE\subset$平面 PBC,所以 $SN//$平面 PBC.



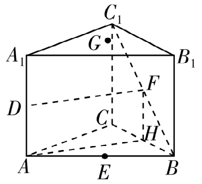
方法总结 面面平行的判定方法

(1)根据判定定理:只需在其中一个平面内找到两条相交的直线,分别证明它们平行于另一个平面,则这两个平面平行.

(2)根据判定定理的推论:在一个平面内找到两条相交的直线分别与另一个平面内两条相交的直线平行,则这两个平面平行.

(3)根据平面平行的传递性:若两个平面都平行于第三个平面,则这两个平面平行.

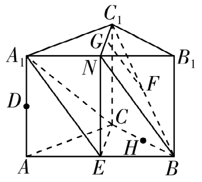
9. C 【解析】如图①,连接 FH,AH,



图①

由题知,$AD // CC_1$,$AD=\dfrac{1}{2}CC_1$,且 $FH // CC_1$,$FH=\dfrac{1}{2}CC_1$,可得 $AD // FH$,$AD=FH$,可知四边形 $ADFH$ 为平行四边形,则 $DF // AH$,又 $DF \not\subset$ 平面 ABC,$AH \subset$ 平面 ABC,所以 $DF //$ 平面 ABC,**故 A 正确**;

如图②,取 A_1B_1 的中点 N,连接 C_1N,EN,BN,易知 C_1,G,N 三点共线,



图②

由三棱柱性质可知 $C_1N // CE$,且 $C_1N \not\subset$ 平面 A_1EC,$CE \subset$ 平面 A_1EC,

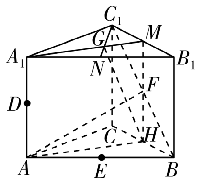
所以 $C_1N //$ 平面 A_1EC,

又 $BN // A_1E$,且 $BN \not\subset$ 平面 A_1EC,$A_1E \subset$ 平面 A_1EC,所以 $BN //$ 平面 A_1EC,

又因为 $C_1N \cap BN=N$,$C_1N,BN \subset$ 平面 C_1BN,所以平面 $C_1BN //$ 平面 A_1EC,

又 $FG \subset$ 平面 C_1BN,所以 $FG //$ 平面 A_1EC,**故 B 正确**;

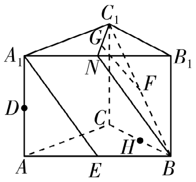
如图③,分别取 B_1C_1,A_1B_1 的中点 M,N,连接 A_1M,MH,C_1N,AH,



图③

由棱柱的性质可知 $A_1M//AH$，即 A_1，M，A，H 四点共面，且 $G,F\in$ 平面 A_1MHA，故 AF，GH 为共面直线，**故 C 错误**；

如图④，取 A_1B_1 的中点 N，连接 C_1N，BN，由选项 B 可知 $BN//A_1E$，且 $BN\subset$ 平面 BC_1N，$A_1E\not\subset$ 平面 BC_1N，所以 $A_1E//$ 平面 BC_1N，且 $\frac{C_1G}{C_1N}=\frac{2}{3}\neq\frac{1}{2}=\frac{C_1F}{C_1B}$，可知 GF，BN 相交，所以 FG，A_1E 为异面直线，**故 D 正确**.

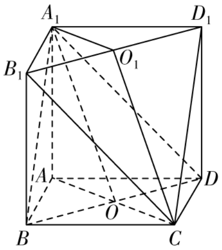


图④

10.【证明】(1) 取 B_1D_1 的中点 O_1，连接 CO_1，A_1O_1. ∵ $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱，且四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴ $A_1O_1//OC$ 且 $A_1O_1=OC$，∴ 四边形 A_1OCO_1 为平行四边形，∴ $A_1O//O_1C$. 又 $O_1C\subset$ 平面 B_1CD_1，$A_1O\not\subset$ 平面 B_1CD_1，∴ $A_1O//$ 平面 B_1CD_1.

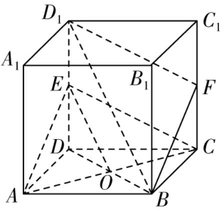
(2) 由直四棱柱的性质易知，$BB_1//DD_1$，且 $BB_1=DD_1$，∴ 四边形 BB_1D_1D 是平行四边形，∴ $BD//B_1D_1$. ∵ $BD\not\subset$ 平面 B_1CD_1，$B_1D_1\subset$ 平面 B_1CD_1，∴ $BD//$ 平面 B_1CD_1. 由(1)得 $A_1O//$ 平面 B_1CD_1，又 $BD\cap A_1O=O$，BD，$A_1O\subset$ 平面 A_1BD，∴ 平面 $A_1BD//$ 平面 B_1CD_1.

(3) 由(2)得 $BD//$ 平面 B_1CD_1，又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $B_1CD_1\cap$ 平面 $ABCD=l$，∴ $BD//l$，又 $B_1D_1//BD$，∴ $B_1D_1//l$.



11. (1)**【证明】**如图，连接 BD 交 AC 于 O，连接 EO.

∵ 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AC\cap BD=O$，∴ O 为 BD 的中点. 又∵ E 为 DD_1 的中点，∴ OE 是 $\triangle DBD_1$ 的中位线，∴ $OE//BD_1$. 又∵ $OE\subset$ 平面 AEC，$BD_1\not\subset$ 平面 AEC，∴ $BD_1//$ 平面 AEC.



(2)【解】当点 F 为 CC_1 的中点时，满足平面 AEC//平面 BFD_1，理由如下：

取 F 为 CC_1 的中点，连接 BF,D_1F.

$\because$ F 为 CC_1 的中点，E 为 DD_1 的中点，

$\therefore$ $CF//ED_1$，$CF=ED_1$，$\therefore$ 四边形 CFD_1E 为平行四边形，$\therefore$ $D_1F//EC$.

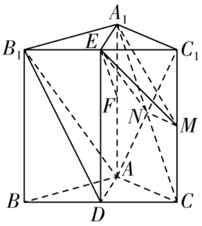
又$\because$ $EC\subset$ 平面 AEC，$D_1F\not\subset$ 平面 AEC，

$\therefore$ $D_1F//$平面 AEC.

由(1)知 $BD_1//$平面 AEC，又$\because$ $BD_1\cap D_1F=D_1$，BD_1，$D_1F\subset$ 平面 BFD_1，$\therefore$ 平面 AEC//平面 BFD_1.

能力上分

1. ABC 【解析】连接 AC_1，ED，如图所示.



由 N 为 AC_1 的中点，且 E 是 B_1C_1 的中点，可知 $EN//AB_1$. 因为 $AB_1\subset$ 平面 ADB_1，$EN\not\subset$ 平面 ADB_1，所以 $EN//$平面 ADB_1. 易知四边形 BCC_1B_1 是平行四边形，D，E 分别为 BC，B_1C_1 的中点，则 $DE//BB_1$，$DE=BB_1$，可得 $DE//AA_1$，$DE=AA_1$，所以四边形 $ADEA_1$ 是平行四边形，所以 $A_1E//AD$. 又 $AD\subset$平面 ADB_1，$A_1E\not\subset$ 平面 ADB_1，则 $A_1E//$平面 ADB_1. 又 A_1E，$EN\subset$平面 A_1EN，$A_1E\cap EN=E$，所以平面 $A_1EN//$平面 ADB_1，**故 D 正确**.

而 EF，A_1M 均与平面 A_1EN 相交，所以 EF，A_1M 均与平面 ADB_1 相交，**故 A，B 错误**.

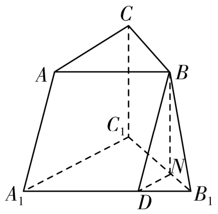
又 M，N 分别为 CC_1，A_1C 的中点，所以 $MN//AC$，又 AC 与平面 ADB_1 相交，所以 MN 与平面 ADB_1 也相交，所以平面 EMN 与平面 ADB_1 相交，**故 C 错误**.

2. C 【解析】过点 D 作 $DN//A_1C_1$，交 B_1C_1 于点 N，连接 BN.

$\because$ 在三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，点 D 在 A_1B_1 上，且 $AA_1//BD$，$AA_1\cap A_1C_1=A_1$，$BD\cap DN=D$，AA_1，$A_1C_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，

$BD,DN\subset$ 平面 BDN，$\therefore$ 平面 $BDN//$ 平面 AA_1C_1C.

$\because M$ 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 内（含边界）的一个动点，且有平面 $BDM//$ 平面 AA_1C_1C，$\therefore M$ 的轨迹是线段 DN，且 M 与 D 不重合，$\therefore$ 动点 M 的轨迹是线段，但只含 1 个端点. **故 C 正确.**



3. ABC 【解析】由三棱柱性质可知平面 $ABC//$ 平面 $A_1B_1C_1$，又平面 $BCHG\cap$ 平面 $ABC=BC$，平面 $BCHG\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=GH$，由面面平行的性质可知 $BC//GH$. 由 E,F 分别是 AB,AC 的中点，可知 $BC//EF$，即可得 $EF//GH$，**故 A 正确.**

由 $EF//GH$，$EF\subset$ 平面 A_1EF，$GH\not\subset$ 平面 A_1EF，可得 $GH//$ 平面 A_1EF，**故 B 正确.**

因为 GH 经过 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心，所以 $\frac{GH}{B_1C_1}=\frac{GH}{BC}=\frac{2}{3}$，又 $\frac{EF}{BC}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{GH}{EF}=\frac{4}{3}$，**故 C 正确.**

易知 A_1E 与 BB_1 相交，所以平面 A_1EF 与平面 BCC_1B_1 相交，**故 D 错误.**

4. (1)【**证明**】连接 OE. 因为 $PB//$ 平面 AEC，$PB\subset$ 平面 PBD，平面 $PBD\cap$ 平面 $AEC=EO$，所以 $PB//EO$.

又底面 $ABCD$ 为平行四边形，所以 O 为 BD 的中点，所以 E 为 PD 的中点.

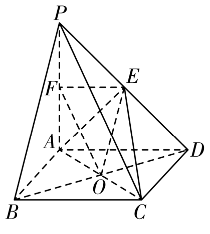
(2)【**解**】存在，当 F 为 PA 的中点时，平面 $OEF//$ 平面 PBC.

证明如下：

如图，取 PA 的中点 F，连接 FE,FO，因为 F 为 PA 的中点，E 为 PD 的中点，所以 $EF//AD$.

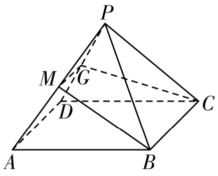
又 $BC//AD$，所以 $EF//BC$. 由于 $EF\not\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，所以 $EF//$ 平面 PBC，同理可证得 $OE//$ 平面 PBC.

又 $OE\cap EF=E$，$OE,EF\subset$ 平面 OEF，所以平面 $OEF//$ 平面 PBC.



5.【解】(1)因为 $PM:MA=1:1$,所以 M 为 PA 的中点. 如图①所示,作 $MG//AD$,交 PD 于 G,则 G 为 PD 的中点,连接 MB,GC.

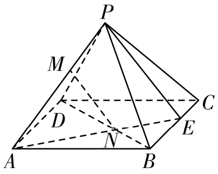
由题意知四边形 $ABCD$ 为平行四边形,则 $BC//AD$,故 $GM//BC$,即 B,M,G,C 四点共面,故要经过点 M 和棱 BC 将木料锯开,在木料表面沿线段 BM,MG,GC 画线即可.



图①

(2)存在,$\frac{BN}{ND}=\frac{5}{8}$,$MN=7$. 理由如下:

假设在线段 BD 上存在一点 N,使直线 $MN//$平面 PBC,连接 AN 并延长,交 BC 于 E,连接 PE,MN,如图②所示.



图②

因为 $MN//$平面 PBC,$MN\subset$平面 PAE,平面 $PAE\cap$平面 $PBC=PE$,故 $MN//PE$,则 $\frac{PM}{MA}=\frac{NE}{NA}=\frac{5}{8}$.

由题意知四边形 $ABCD$ 为正方形,故 $BC//AD$,则 $\frac{EN}{NA}=\frac{BN}{ND}=\frac{5}{8}$,即假设成立,故在线段 BD 上存在一点 N,使直线 $MN//$平面 PBC,此时 $\frac{BN}{ND}=\frac{5}{8}$.

由于 $BC//AD$,$AD=13$,故 $\frac{BE}{AD}=\frac{BN}{ND}=\frac{5}{8}$,故 $BE=\frac{65}{8}$,在 $\triangle PBE$ 中,$\angle PBE=60°$,则由余弦定理得 $PE^2=PB^2+BE^2-2PB\cdot BE\cos 60°=13^2+\left(\frac{65}{8}\right)^2-2\times13\times\frac{65}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{8\ 281}{64}$,即 $PE=\frac{91}{8}$,

而 $MN//PE$,$PM:MA=5:8$,

故 $\frac{MN}{PE}=\frac{MA}{PA}=\frac{8}{13}$,则 $MN=\frac{8}{13}\times\frac{91}{8}=7$.

§4 节测上分

1. B 【解析】若 $m//\alpha,n//\alpha$,则 m,n 平行或相交或异面,**故 A 错误**;

若 $m/\!/\alpha,\alpha/\!/\beta$，则 $m/\!/\beta$ 或 $m\subset\beta$，又 $m\not\subset\beta$，所以 $m/\!/\beta$，**故 B 正确**；

若 $m/\!/\alpha,m/\!/\beta$，则 α,β 平行或相交，**故 C 错误**；

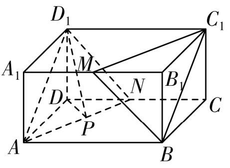
若 $m/\!/n,n/\!/\alpha$，则 $m/\!/\alpha$ 或 $m\subset\alpha$，**故 D 错误**.

2. A 【解析】如图，取 CD 的中点 N，连接 D_1N,D_1A,AN，易知 $AB/\!/C_1D_1,AB=C_1D_1$，所以四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，所以 $AD_1/\!/BC_1$，又 $BC_1\subset$平面 BMC_1，$AD_1\not\subset$平面 BMC_1，所以 $AD_1/\!/$平面 BMC_1，

同理可得 $AN/\!/$平面 BMC_1，又 $AN\cap AD_1=A$，$AN,AD_1\subset$平面 AD_1N，所以平面 $AD_1N/\!/$平面 BMC_1，又直线 $PD_1/\!/$平面 BMC_1，故 P 在线段 AN 上运动.

易知 $\triangle D_1DP$ 是直角三角形，$S_{\triangle D_1DP}=\frac{1}{2}DP\cdot DD_1$，$DD_1=1$，当 $DP\perp AN$ 时，DP 最小，最小值为 $\frac{1\times2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

此时 $\triangle D_1DP$ 的面积最小，最小值为 $\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times1=\frac{\sqrt{5}}{5}$，**故 A 正确**.



3. 2　1 : 2 【解析】设平面 $AB_1C\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=m$，因为 $EF/\!/$平面 AB_1C，$EF\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $EF/\!/m$，

又平面 $A_1B_1C_1D_1/\!/$平面 $ABCD$，平面 $AB_1C\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=m$，平面 $AB_1C\cap$平面 $ABCD=AC$，

所以 $m/\!/AC$，所以 $EF/\!/AC$，连接 A_1C_1（图略），因为 $A_1C_1/\!/AC$，所以 $EF/\!/A_1C_1$.

又 $AB=2\sqrt{2}$，E 为 A_1D_1 的中点，所以 $EF=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=2$.

当 H 为 DD_1 的中点时，连接 A_1D（图略），由 E 为 A_1D_1 的中点，可得 $EH/\!/A_1D$，又 $A_1D/\!/B_1C$，所以 $EH/\!/B_1C$，又 $B_1C\subset$平面 AB_1C，$EH\not\subset$平面 AB_1C，所以 $EH/\!/$平面 AB_1C.

又 $EF/\!/$平面 AB_1C，$EF\cap EH=E$，$EF,EH\subset$平面 EFH，所以平面 $EFH/\!/$平面 AB_1C，所以 $DH:DD_1=1:2$.

4. $\frac{3}{2}$　**【解析】**如图，取 B_1C_1 的中点 M，在 BB_1 上取一点 H，使得 $B_1H=\frac{1}{3}BB_1$，

连接 A_1M，HM，A_1H，ME，MF，HE，

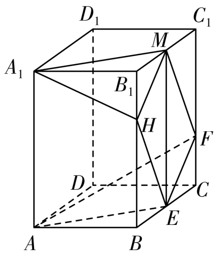
因为 M，E 均为所在棱的中点，所以 $A_1A=ME$，$A_1A//ME$，

则四边形 A_1AEM 为平行四边形，所以 $A_1M//AE$，

同理可知 $HM//EF$，又 $A_1M\cap HM=M$，$AE\cap EF=E$，A_1M，$HM\subset$平面 A_1HM，AE，$EF\subset$平面 AEF，

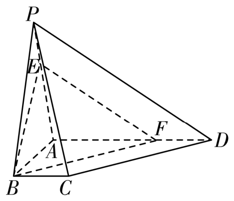
所以平面 $AEF//$平面 A_1HM，则平面 A_1HM 即为平面 α，则过 A_1 且平行于平面 AEF 的平面 α 截四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面图形是$\triangle A_1HM$，其中 $B_1H=\frac{1}{3}BB_1=1$，$B_1M=1$，$A_1M=A_1H=\sqrt{5}$，$MH=\sqrt{2}$，$\cos\angle MA_1H=\frac{A_1M^2+A_1H^2-HM^2}{2\cdot A_1M\cdot A_1H}=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin\angle MA_1H=\frac{3}{5}$，$S_{\triangle A_1MH}=\frac{1}{2}A_1M\cdot A_1H\cdot\sin\angle MA_1H=\frac{3}{2}$.



5. (1)**【证明】**因为 $AD//$平面 PBC，$AD\subset$平面 $ABCD$，平面 $PBC\cap$平面 $ABCD=BC$，所以 $AD//BC$.

(2)**【解】**存在，当点 F 满足 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，即 $\lambda=\frac{2}{3}$时，平面 $BEF//$平面 PCD. 证明如下：



取 AD 上一点 F，使 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，如图，连接 BE，EF，BF，因为 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{PE}=$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$,所以 $EF//PD$.

因为 $EF\not\subset$平面 PCD,$PD\subset$平面 PCD,所以 $EF//$平面 PCD.

由(1)知,$AD//BC$,所以 $BC//FD$,因为 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,$BC=\frac{1}{3}AD$,所以 $BC=FD$,所以四边形 $BCDF$ 是平行四边形,所以 $BF//CD$.

因为 $BF\not\subset$平面 PCD,$CD\subset$平面 PCD,所以 $BF//$平面 PCD.

因为 $EF\cap BF=F$,$EF,BF\subset$平面 BEF,所以平面 $BEF//$平面 PCD.

§5　垂直关系

5.1　直线与平面垂直

对点上分

1. B　【解析】因为 $l\perp$平面 $ABCD$,且 $BB_1\perp$平面 $ABCD$,直线 l 与直线 BB_1 不重合,所以 $BB_1//l$,**故 B 正确**.

2. D　【解析】对于 A,若直线 a,b 和平面 α 所成的角相等,则直线 a,b 可以相交或异面或平行,**故 A 错误**;

对于 B,若 $a\perp c,b\perp c$,则直线 a,b 可以相交或异面或平行,**故 B 错误**;

对于 C,若 $a\perp\alpha,a\perp b$,则 b 与 α 可能平行,也可能 b 在 α 内,**故 C 错误**;

对于 D,若 $a\perp\alpha,b\perp\alpha$,由线面垂直的性质定理可得 $a//b$,**故 D 正确**.

3. A

攻略上分　本题考查了线面垂直的判定,具体可见通法攻略 47.

【解析】在正方形 $ABCD$ 中,$AD\perp DF$,$AB\perp BE$,所以折起后 $AH\perp FH$,$AH\perp EH$,$FH\cap EH=H$,又 $FH\subset$平面 EFH,$EH\subset$平面 EFH,所以 AH 垂直于 $\triangle EFH$ 所在平面,**故 A 正确**,**B 错误**;

因为 $AF\subset$平面 AEF,$\angle HFA\neq\frac{\pi}{2}$,所以 HF 与平面 AEF 不垂直,**故 C 错误**;

不妨设正方形 $ABCD$ 的边长为 1,易知空间图形中,$HG=\frac{\sqrt{2}}{4}$,$AG=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,$AH=1$,因为 $AH^2\neq HG^2+AG^2$,所以 $\angle HGA\neq\frac{\pi}{2}$,又 $AG\subset$平面 AEF,所以 HG 与平面 AEF 不垂直,**故 D 错误**. **故选** A.

归纳总结 证明直线与平面垂直的常用方法

(1)利用线面垂直的判定定理.

(2)利用"两平行线中的一条与平面垂直,则另一条也与这个平面垂直".

(3)利用"一条直线垂直于两个平行平面中的一个,则也垂直于另一个平面".

4. B 【解析】因为 $MC\perp$ 平面 $ABCD$,$BD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $MC\perp BD$.

连接 AC(图略),若满足 $MA\perp BD$,因为 $MA\cap MC=M$,$MA,MC\subset$ 平面 MAC,所以 $BD\perp$ 平面 MAC.

又因为 $AC\subset$ 平面 MAC,所以 $BD\perp AC$.

故当 $BD\perp AC$ 时,$AC\cap MC=C$,$AC,MC\subset$ 平面 MAC,则 $BD\perp$ 平面 MAC,又 $MA\subset$ 平面 MAC,所以 $MA\perp BD$.

所以当 $BD\perp AC$ 时,即可推出 $MA\perp BD$,所以四边形 $ABCD$ 为菱形. **故 B 正确.**

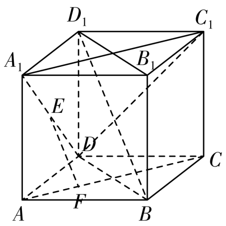
5. 【证明】(1)$\because$ 底面 $ABCD$ 是矩形,$\therefore AB/\!/CD$. 又 $AB\not\subset$ 平面 $DCFE$,$DC\subset$ 平面 $DCFE$,$\therefore AB/\!/$平面 $DCFE$.

又 $AB\subset$ 平面 $ABFE$,平面 $ABFE\cap$ 平面 $DCFE=EF$,$\therefore AB/\!/EF$.

(2)由题意得 $BC\perp AB$,$BC\perp BF$,$AB\cap BF=B$,$AB\subset$ 平面 $ABFE$,$BF\subset$ 平面 $ABFE$,$\therefore BC\perp$ 平面 $ABFE$.

又 $BC/\!/AD$,$\therefore AD\perp$ 平面 $ABFE$. $\because AE\subset$ 平面 $ABFE$,$\therefore AD\perp AE$.

6. 【证明】如图,连接 A_1C_1,C_1D,B_1D_1,BD.



$\because AC/\!/A_1C_1$,$EF\perp AC$,$\therefore EF\perp A_1C_1$.

又 $EF\perp A_1D$,$A_1D\cap A_1C_1=A_1$,A_1D,$A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1D,$\therefore EF\perp$ 平面 A_1C_1D①.

$\because BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,$\therefore BB_1\perp A_1C_1$.

$\because$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形,$\therefore A_1C_1\perp B_1D_1$,又 $B_1D_1\cap BB_1=B_1$,B_1D_1,$BB_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,$\therefore A_1C_1\perp$ 平面 BB_1D_1D,而 $BD_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,$\therefore A_1C_1\perp BD_1$.

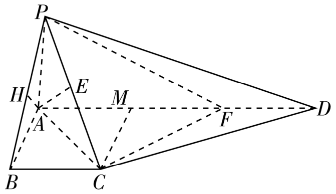
同理 $DC_1\perp BD_1$.

又 $DC_1\cap A_1C_1=C_1$, DC_1, $A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1D, $\therefore BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D②.

由①②可知 $EF/\!/BD_1$.

名师点拨 解答空间几何体中的平行、垂直关系时，一般要根据已知条件把空间中的线线、线面、面面之间的平行、垂直关系进行转化，转化时要正确运用有关的定理，找出足够的条件进行推理. 解答本题的关键是由线线垂直证明线面垂直，进而证明线线平行.

7.【解】(1) 如图，作 $AH\perp PB$ 交 PB 于点 H，



$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$, $BC\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA\perp BC$，又 $BC\perp AB$，且 $PA\cap AB=A$, PA, $AB\subset$ 平面 PAB, $\therefore BC\perp$ 平面 PAB，又 $AH\subset$ 平面 PAB,

$\therefore BC\perp AH$，又 $AH\perp PB$, $PB\cap BC=B$, PB, $BC\subset$ 平面 PBC, $\therefore AH\perp$ 平面 PBC.

又 $AD/\!/BC$, $AD\not\subset$ 平面 PBC, $BC\subset$ 平面 PBC, $\therefore AD/\!/$ 平面 PBC,

$\therefore$ 直线 AD 到平面 PBC 的距离即点 A 到平面 PBC 的距离，即 AH 的长.

在等腰直角三角形 PAB 中，易知 $AH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, $\therefore$ 直线 AD 到平面 PBC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

(2) 连接 AC，作 $AE\perp PC$ 交 PC 于点 E，则 AE 的长即为点 A 到 PC 的距离.

由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AC\subset$ 平面 $ABCD$，得 $PA\perp AC$，又 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$, $AB=BC=a$,

$\therefore AC=\sqrt{2}a$，又 $PA=a$, $\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAC$ 中，$PC=\sqrt{3}a$.

$\because \dfrac{1}{2}AE\cdot PC=\dfrac{1}{2}PA\cdot AC$,

$\therefore AE=\dfrac{PA\cdot AC}{PC}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$,

即点 A 到直线 PC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

(3) 假设在线段 AD 上存在一点 F，使点 A

到平面 PCF 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

过 C 作 $CM\perp AD$ 交 AD 于点 M，在 $\text{Rt}\triangle CMD$ 中，$CM=a$，$\cos\angle ADC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

可得 $CD=\sqrt{5}a$，$DM=2a$，$\therefore AD=3a$.

由(2)知 $AE=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，故只需存在 F，使得 $AE\perp$平面 PCF 即可.

由题意可知，只需 $AC\perp CF$，即可证 $AE\perp$平面 PCF.

设 $DF=x$，则 $AF=3a-x$，

在 $\triangle CDF$ 中，由余弦定理可得 $CF^2=x^2+5a^2-4ax$，

若 $AC\perp CF$，在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中，

$AF^2=CF^2+AC^2$，

即 $(3a-x)^2=2a^2+x^2+5a^2-4ax$，

解得 $x=a$，此时 $AF=2a$.

易证 $PA\perp CF$，又 $AC\perp CF$，$PA\cap AC=A$，$PA,AC\subset$平面 PAC，

$\therefore CF\perp$平面 PAC，又 $AE\subset$平面 PAC，

$\therefore CF\perp AE$，又 $AE\perp PC$，$PC\cap CF=C$，$PC,CF\subset$平面 PCF，

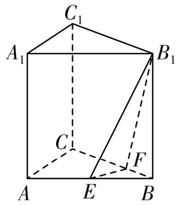
$\therefore AE\perp$平面 PCF，即点 A 到平面 PCF 的距离为 AE，此时 $AE=\frac{\sqrt{6}}{3}a$ 满足条件.

8. A 【解析】如图，过 E 作 $EF\perp BC$，F 为垂足，连接 B_1F，由题可知 $BB_1\perp$平面 ABC，

$\because EF\subset$平面 ABC，$\therefore BB_1\perp EF$，又 $BC\cap BB_1=B$，$\therefore EF\perp$平面 BCC_1B_1，则 $\angle EB_1F$ 为直线 B_1E 与平面 BCC_1B_1 所成的角.

设三棱柱的棱长为 2，则 $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$B_1E=\sqrt{5}$，$\because B_1F\subset$平面 BCC_1B_1，$\therefore EF\perp B_1F$，

$\therefore \sin\angle EB_1F=\frac{\sqrt{15}}{10}$. **故 A 正确.**



9. C

攻略上分 本题为求直线与平面所成角的正弦值，具体可见通法攻略 48.

【解析】如图，连接 DF，取 $\triangle BCD$ 的中心 G，则 G 在 DF 上，连接 AG，

则 $AG\perp$ 平面 BCD，过点 E 作 $ET/\!/AG$ 交 FD 于点 T，

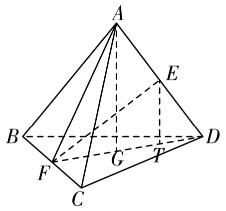
则 $ET\perp$ 平面 BCD，E 为 AD 的中点，则 T 为 DG 的中点.

所以 $\angle EFD$ 为直线 EF 与平面 BCD 所成的角.

设正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 2，则 $DF=\sqrt{3}$，$GD=\frac{2}{3}DF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\angle ADG=$

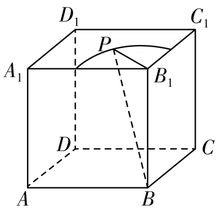
$\cos\angle EDF=\frac{GD}{AD}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

连接 AF，$AF=\sqrt{3}$，$DF=\sqrt{3}$，E 是 AD 的中点，所以 $EF\perp AD$，所以 $\sin\angle EFD=\cos\angle EDF=\frac{\sqrt{3}}{3}$，**故 C 正确.**



10. B 【解析】直线 BP 与下底面 $ABCD$ 所成角等于直线 BP 与上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角，连接 B_1P，如图，因为 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$PB_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $BB_1\perp PB_1$，故 $\angle BPB_1$ 为直线 BP 与上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角，则 $\angle BPB_1=60^\circ$.

因为 $BB_1=1$，所以 $PB_1=\frac{BB_1}{\tan 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故点 P 的轨迹为以 B_1 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为半径，位于上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的圆的 $\frac{1}{4}$，故轨迹长度为 $\frac{1}{4}\times 2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$. **故选 B.**

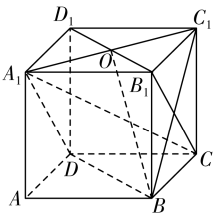


11. (1)【证明】如图，连接 B_1C，A_1D，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $A_1B_1\perp$ 平面 BB_1C_1C，$BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，则 $A_1B_1\perp BC_1$.

因为 $B_1C\perp BC_1$，$A_1B_1\cap B_1C=B_1$，A_1B_1，$B_1C\subset$ 平面 A_1B_1CD，所以 $BC_1\perp$ 平

面 A_1B_1CD.

又 $CA_1\subset$平面 A_1B_1CD,所以 $BC_1\perp CA_1$.



(2)【解】如图,连接 A_1C_1,设 $A_1C_1\cap B_1D_1=O$,连接 BO.

因为 $BB_1\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$,$C_1O\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$,则 $C_1O\perp BB_1$.

因为 $C_1O\perp B_1D_1$,$B_1D_1\cap BB_1=B_1$,B_1D_1,$BB_1\subset$平面 BB_1D_1D,

所以 $C_1O\perp$平面 BB_1D_1D,所以 $\angle C_1BO$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角.

因为正方体的棱长为 1,则 $C_1O=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$BC_1=\sqrt{2}$,所以 $\sin\angle C_1BO=\dfrac{C_1O}{BC_1}=\dfrac{1}{2}$,故直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $30°$.

能力上分

1. D

思路导引 当点 N 是 AC 上靠近点 A 的四等分点时,证得 $MN\perp$平面 ACC_1A_1,可得直线 MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值的最大值.

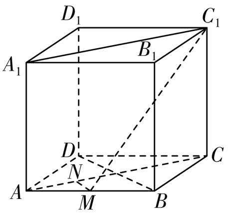
因为点 M 到平面 ACC_1A_1 的距离是定值,所以求线面角的最小值,转化为求 MN 的最大值,利用数形结合法求解,最后得出结论.

【解析】连接 BD,如图,设正方体棱长为 2,易知 $BD\perp$平面 ACC_1A_1,当点 N 是 AC 上靠近点 A 的四等分点时,$MN/\!/BD$,此时 $MN\perp$平面 ACC_1A_1,直线 MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值最大,为 1.

连接 MC_1,当点 N 与 C_1 重合时,MN 最长,$MC_1=\sqrt{BM^2+BC^2+CC_1^2}=3$,又点 M 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $\dfrac{BD}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以此时直线 MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值最小,即 MC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值最小,为 $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

所以直线 MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的

正弦值的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{2}}{6},1\right]$. **故选** D.



2. C 【解析】连接 AC 交 BD 于点 E，由四边形 $ABCD$ 为正方形，得 $AC\perp BD$，且 E 为 AC 的中点，

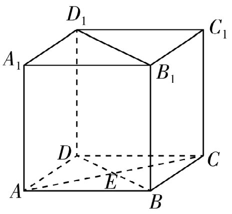
由 $BB_1\perp$底面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，得 $BB_1\perp AC$，

而 $BB_1\cap BD=B$，BB_1，$BD\subset$平面 BDD_1B_1，则 $AC\perp$平面 BDD_1B_1，因此 AE 的长即为点 A 到平面 BDD_1B_1 的距离，

又正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为$\sqrt{2}$，

E 是 AC 的中点，则 $AE=\frac{1}{2}\sqrt{2+2}=1$，而 $AA_1/\!/BB_1$，$BB_1\subset$平面 BDD_1B_1，$AA_1\not\subset$平面 BDD_1B_1，则 $AA_1/\!/$平面 BDD_1B_1，

故直线 AA_1 到平面 BDD_1B_1 的距离即为点 A 到平面 BDD_1B_1 的距离 $AE=1$. **故选** C.



3. (1)【**证明**】连接 MN. 由已知可得 $CM=AN=2$，又 $AC=2$，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，易得四边形 $ANMC$ 是正方形，则 $AM\perp CN$.

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $AA_1\perp$平面 ABC，又 $AB\subset$平面 ABC，所以 $AA_1\perp AB$.

因为 $AB\perp AC$，$AC\cap AA_1=A$，AC，$AA_1\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $AB\perp$平面 ACC_1A_1.

因为 $CN\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $AB\perp CN$.

又 $AB\cap AM=A$，AB，$AM\subset$平面 ABM，所以 $CN\perp$平面 ABM.

(2)【**解**】连接 A_1M，过 A_1 作 $A_1E\perp AM$ 交 AM 于点 E，因为 $AB\perp$平面 A_1MA，$A_1E\subset$平面 A_1MA，所以 $AB\perp A_1E$，又 AB，$AM\subset$平面 ABM，$AB\cap AM=A$，所以 $A_1E\perp$平面 ABM.

所以点 A_1 到平面 ABM 的距离为 A_1E 的长度.

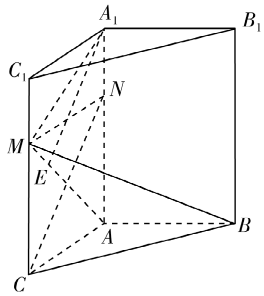
由题知 $AM=2\sqrt{2}$，$AA_1=3$，$\angle MAA_1=45°$.

在$\triangle MA_1A$中，根据等面积法得$\frac{1}{2}\cdot A_1E\cdot AM=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot AA_1\cdot\sin 45°$，即$\frac{1}{2}\times A_1E\times 2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\times\sin 45°$，得$A_1E=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

又因为$B_1A_1//AB$，$AB\subset$平面ABM，$B_1A_1\not\subset$平面ABM，所以$B_1A_1//$平面ABM，

所以点B_1到平面ABM的距离等于点A_1到平面ABM的距离，

即点B_1到平面ABM的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.



4. **思路导引** (1)根据正方体的结构特征证得$B_1D_1\perp A_1C_1$，由线面垂直的性质证得$A_1C_1\perp DD_1$，再由线面垂直的判定定理证得$A_1C_1\perp$平面B_1DD_1，最后根据线面垂直的性质即可证明$B_1D\perp A_1C_1$.

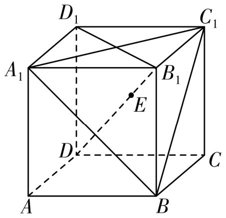
(2)由(1)进一步证得$B_1E\perp$平面A_1BC_1，结合正方体的结构特征证明$\mathrm{Rt}\triangle B_1EA_1\cong\mathrm{Rt}\triangle B_1EC_1\cong\mathrm{Rt}\triangle B_1EB$，进而得到$E$为$\triangle A_1BC_1$的外心，根据$\triangle A_1BC_1$是正三角形，即可得到$E$为正三角形$A_1BC_1$的中心.

(3)求出B_1E，DE的长，由$B_1D\perp$平面A_1BC_1得到线线垂直关系，再根据$PD+PB_1=7+\sqrt{13}$求出PE的长，找到直线B_1P与平面A_1BC_1所成角，计算正切值即可.

(1)**【证明】**如图①，连接D_1B_1，因为四边形$A_1B_1C_1D_1$为正方形，所以$B_1D_1\perp A_1C_1$.

因为$DD_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$A_1C_1\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，所以$A_1C_1\perp DD_1$.

又$B_1D_1\cap DD_1=D_1$，B_1D_1，$DD_1\subset$平面B_1DD_1，所以$A_1C_1\perp$平面B_1DD_1，又$B_1D\subset$平面B_1DD_1，所以$B_1D\perp A_1C_1$.



图①

(2)【证明】如图②,连接 EA_1,EB,EC_1,由(1)知,$B_1D\perp A_1C_1$,同理可证 $B_1D\perp A_1B$,

又 $A_1B\cap A_1C_1=A_1$,A_1B,$A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1,所以 $B_1D\perp$ 平面 A_1BC_1,

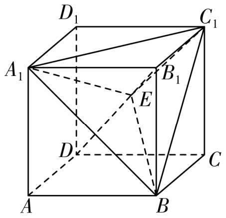
即 $B_1E\perp$ 平面 A_1BC_1.

又 A_1E,BE,$C_1E\subset$ 平面 A_1BC_1,所以 $B_1E\perp A_1E$,$B_1E\perp BE$,$B_1E\perp C_1E$,又因为 $A_1B_1=BB_1=B_1C_1$,

所以 $\mathrm{Rt}\triangle B_1EA_1\cong\mathrm{Rt}\triangle B_1EC_1\cong\mathrm{Rt}\triangle B_1EB$,所以 $EA_1=EB=EC_1$,

所以 E 为 $\triangle A_1BC_1$ 的外心,因为 $A_1C_1=A_1B=BC_1$,

所以 $\triangle A_1BC_1$ 是正三角形,所以 E 为 $\triangle A_1BC_1$ 的中心.



图②

(3)【解】如图③,连接 PD,PB_1,EA_1,EB,EP,由(2)知 E 为正三角形 A_1BC_1 的中心,由题意知,$A_1B=6\sqrt{2}$.

在 $\triangle A_1EB$ 中,由正弦定理得 $BE=\dfrac{A_1B\sin\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{6\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{6}$,

$B_1E=\sqrt{BB_1^2-BE^2}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$.

因为 $B_1D=\sqrt{6^2+6^2+6^2}=6\sqrt{3}$,所以 $DE=B_1D-B_1E=4\sqrt{3}$.

因为 $B_1D\perp$ 平面 A_1BC_1,$PE\subset$ 平面 A_1BC_1,所以 $PE\perp B_1D$,

即 $B_1E\perp PE$,$DE\perp PE$.

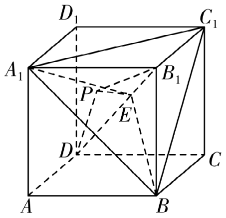
$PD+PB_1=7+\sqrt{13}$,即 $\sqrt{PE^2+48}+\sqrt{PE^2+12}=7+\sqrt{13}$,

又 $PE>0$,解得 $PE=1$,所以点 P 的轨迹是以点 E 为圆心,1 为半径的圆.

因为 $B_1E\perp$ 平面 A_1BC_1,所以 B_1P 与平面

A_1BC_1 所成角为$\angle B_1PE$,

而 $\tan\angle B_1PE=\dfrac{B_1E}{PE}=\dfrac{2\sqrt{3}}{1}=2\sqrt{3}$，又 $0<\angle B_1PE<\dfrac{\pi}{2}$，故直线 B_1P 与平面 A_1BC_1 所成角的正切值为 $2\sqrt{3}$.



图③

5.2　平面与平面垂直

对点上分

1. B　【解析】对于①，显然混淆了平面与半平面的概念，是错误的；

对于②，由于 a,b 分别垂直于两个半平面，所以也垂直于二面角的棱，但由于异面直线所成的角为锐角或直角，所以 a,b 所成的角与二面角相等或互补，是正确的；

对于③，因为所作射线不垂直于棱，所以是错误的；

④是正确的. **故 B 正确.**

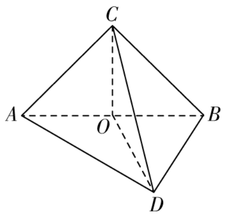
2. A

攻略上分　本题为求有棱二面角的平面角问题，利用通法攻略 49 中的定义法求解即可.

【解析】在四面体 $A-BCD$ 中，取 AB 的中点 O，连接 CO,DO，如图.

由 $AD=BD=AB=4$，$AC=BC$，$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，得 $OC\perp AB$，$OD\perp AB$，因此$\angle COD$ 是二面角 $C-AB-D$ 的平面角.

在$\triangle COD$ 中，$OC=2$，$OD=2\sqrt{3}$，$CD=2\sqrt{7}$，由余弦定理得 $\cos\angle COD=\dfrac{OC^2+OD^2-CD^2}{2OC\cdot OD}=\dfrac{4+12-28}{2\times2\times2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，而 $0\leqslant\angle COD\leqslant\pi$，则$\angle COD=\dfrac{5\pi}{6}$，所以二面角 $C-AB-D$ 的大小为$\dfrac{5\pi}{6}$. **故 A 正确.**



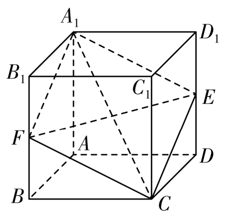
3. $2\sqrt{6}$　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　【解析】如图,设平面 $A_1EC\cap$ 平面 $B_1C_1CB=CF$,连接 A_1F,EF,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$\because$ 平面 A_1D_1DA // 平面 B_1C_1CB,平面 $A_1EC\cap$ 平面 $A_1D_1DA=A_1E$,$\therefore A_1E//CF$,

$\because E$ 是棱 DD_1 的中点,$\therefore F$ 是棱 BB_1 的中点,$A_1E=CE=CF=A_1F=\sqrt{5}$,

$\therefore$ 截面 A_1ECF 是边长为$\sqrt{5}$的菱形,其对角线 $EF=2\sqrt{2}$,$A_1C=2\sqrt{3}$,故截面面积 $S=\dfrac{1}{2}A_1C\times EF=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}=2\sqrt{6}$.

设平面 A_1EC 与底面 $ABCD$ 所成锐二面角为 θ,$\because$ 截面在底面的射影为正方形 $ABCD$,$\therefore \cos\theta=\dfrac{S_{正方形ABCD}}{S}=\dfrac{2^2}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



4. ABD　【解析】对于 A,若 $a//b$,$b\subset\alpha$,$a\not\subset\alpha$,根据线面平行的判定定理可知 $a//\alpha$,**故 A 正确**;

对于 B,若 $a\perp\alpha$,$b\perp\alpha$,根据线面垂直的性质可知 $a//b$,**故 B 正确**;

对于 C,当 $a\subset\alpha$ 时,$\alpha\perp\beta$,$\alpha\cap\beta=b$,$a\perp b$,由面面垂直的性质定理可得 $a\perp\beta$,当 $a\not\subset\alpha$ 时,$\alpha\perp\beta$,$\alpha\cap\beta=b$,$a\perp b$,则 $a//\beta$ 或 $a\subset\beta$ 或 a 与 β 相交,**故 C 错误**;

对于 D,因为 $a\subset\alpha$,$b//\alpha$,所以存在 $b'\subset\alpha$ 使得 $b'//b$,又 $b\subset\beta$,$b'\not\subset\beta$,所以 $b'//\beta$,又 $a//\beta$ 且 a,b 为异面直线,所以平面 α 内的两直线 b',a 必相交,所以 $\alpha//\beta$,**故 D 正确.**

5. D　【解析】如图,连接 AM,因为 $AD\perp AB$,平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$,$AD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $AD\perp$ 平面 PAB.

因为 $AD//BC$,所以 $BC\perp$ 平面 PAB.

因为 $AM\subset$ 平面 PAB,所以 $AD\perp AM$.

因为 $BM\subset$ 平面 PAB,所以 $BC\perp BM$.

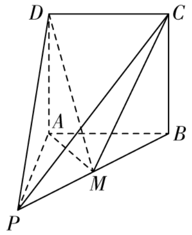
又 $AP=AB=2$,所以 $AM=\dfrac{1}{2}PB=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$,

所以 $DM=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$,$CM=$

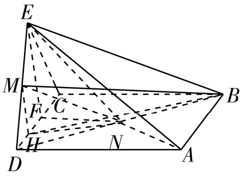
$\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$,

所以在 $\triangle CDM$ 中,由余弦定理得

$\cos\angle DMC=\dfrac{DM^2+CM^2-CD^2}{2DM\cdot CM}=\dfrac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{2}{3}$. **故 D 正确.**



6. D 【解析】取 CD 中点 F,连接 EF,FN,取 FD 中点 H,连接 MH,HB,NH.



又 $\triangle ECD$ 为正三角形,则 $EF\perp CD$,$MH\perp CD$,又平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $ECD\cap$ 平面 $ABCD=CD$,$EF\subset$ 平面 ECD,$MHC\subset$ 平面 ECD,则 $EF\perp$ 平面 $ABCD$,$MH\perp$ 平面 $ABCD$,又 $FN\subset$ 平面 $ABCD$,$HB\subset$ 平面 $ABCD$,则 $EF\perp FN$,$MH\perp HB$,

设 $AB=a$,则 $EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,$MH=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$,$FN=\dfrac{1}{2}a$,$BH=\dfrac{5}{4}a$,则 $BM=\sqrt{MH^2+BH^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}a$,$EN=\sqrt{EF^2+NF^2}=a$,则 $BM\neq EN$.

故 A 错误.

假设 $CD\perp MN$,又 $MH\perp CD$,$MH\cap MN=M$,MH,$MN\subset$ 平面 MNH,则 $CD\perp$ 平面 MNH,又 $NH\subset$ 平面 MNH,则 $CD\perp NH$,这与 $CD\perp NF$ 矛盾,故假设不成立,CD,MN 不互相垂直. **故 B 错误.**

连接 AN,由 A,$N\in$ 平面 $ABCD$,可得直线 $AN\subset$ 平面 $ABCD$,假设 A,M,N 三点共线,则 $M\in AN$,则 $M\in$ 平面 $ABCD$,这与 $M\notin$ 平面 $ABCD$ 矛盾,故假设不成立. **故 C 错误.**

连接 BD,则 D,N,B 三点共线,且 $DN=NB$,由 $DM=ME$,$DN=NB$,可得 $MN/\!/BE$,$MN=\dfrac{1}{2}BE$,则四边形 $MNBE$ 为梯形,则直线 BM 与 EN 相交. **故 D 正确.**

7. B 【解析】由 $m/\!/\beta$,得在平面 β 内有一

条直线 l 与 m 平行,

又 $m\perp\alpha$,所以 $l\perp\alpha$,所以 $\alpha\perp\beta$;

由 $m\perp\alpha,\alpha\perp\beta$,得 $m//\beta$ 或 $m\subset\beta$.

故"$m//\beta$"是"$\alpha\perp\beta$"的充分不必要条件.

故 B 正确.

8. C 【解析】对于 C,因为 $AB=CB,AD=CD$,E 是 AC 的中点,所以 $BE\perp AC,DE\perp AC$,因为 $DE\cap BE=E,DE,BE\subset$平面 BDE,所以 $AC\perp$平面 BDE,因为 $AC\subset$平面 ABC,所以平面 $ABC\perp$平面 BDE,同理 $AC\subset$平面 ACD,所以平面 $ACD\perp$平面 BDE,**故 C 正确;**

对于 A,B,由于平面 $ABC\perp$平面 BDE,平面 $BDE\cap$平面 $ABD=BD$,而 BD 不垂直于平面 ABC,故平面 ABC 与平面 ABD 不垂直,同理可得平面 ABC 与平面 BCD 不垂直,**故 A,B 错误;**

对于 D,平面 ABC 与平面 ACD 不一定垂直,**故 D 错误.**

9.【证明】(1)$\because$ 几何体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,$\therefore BB_1//DD_1$,

且 $BB_1=DD_1$,$\therefore$ 四边形 BDD_1B_1 是平行四边形,$\therefore BD//B_1D_1$.

又$\because BD\not\subset$平面 B_1D_1C,$B_1D_1\subset$平面 B_1D_1C,$\therefore BD//$平面 B_1D_1C.

同理,$A_1B//$平面 B_1D_1C,且 $A_1B\cap BD=B$,$A_1B,BD\subset$平面 A_1BD,$\therefore$ 平面 $A_1BD//$平面 CB_1D_1.

(2)$\because$ 几何体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,$\therefore AA_1\perp$平面 $ABCD$,又 $BD\subset$平面 $ABCD$,$\therefore AA_1\perp BD$.

又$\because BD\perp AC,A_1A\cap AC=A,A_1A,AC\subset$平面 ACC_1A_1,$\therefore BD\perp$平面 ACC_1A_1.

又 $BD\subset$平面 A_1BD,$\therefore$ 平面 $A_1BD\perp$平面 ACC_1A_1.

10. (1)**【证明】**连接 OD,如图①所示,易知 OD,OC 为正方形对角线的一半,

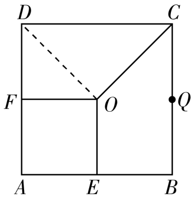
所以 $OD\perp OC,OD\subset$平面 $FOCD$,

由于平面 $FOCD\perp$平面 $EBCO$,平面 $FOCD\cap$平面 $EBCO=OC$,

所以 $OD\perp$平面 $EBCO$,又 $BC\subset$平面 $EBCO$,所以 $OD\perp BC$,

因为 Q 为 BC 的中点,所以 $OQ\perp BC$,$OD\cap OQ=O,OD,OQ\subset$平面 ODQ,

所以 $BC\perp$平面 ODQ,又 $BC\subset$平面 BCD,所以平面 $ODQ\perp$平面 BCD.



图①

(2)【解】设 $EQ\cap OB=G$,连接 DG,如图②所示,由于点 E,Q 分别为 AB,BC 中点,O 为正方形 $ABCD$ 的中心,

所以四边形 $OEBQ$ 是边长为 2 的正方形,则 $GB\perp EQ$,

且易知 $GD\perp EQ$,又 $GD\cap GB=G$,

$GD\subset$ 平面 BGD,$GB\subset$ 平面 BGD,所以 $EQ\perp$ 平面 BGD,

又平面 $BGD\cap$ 平面 $DEQ=DG$,平面 $BGD\cap$ 平面 $BEQ=BG$,

所以 $\angle DGB$ 为二面角 $D-EQ-B$ 的平面角.

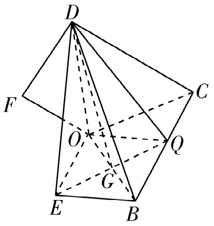
在 Rt $\triangle DOB$ 中,$BD=\sqrt{OB^2+OD^2}=\sqrt{8+8}=4$,

在 Rt $\triangle DOG$ 中,$DG=\sqrt{OG^2+OD^2}=\sqrt{2+8}=\sqrt{10}$,又 $GB=\sqrt{2}$,

在 $\triangle BGD$ 中,$\cos\angle DGB=\dfrac{DG^2+BG^2-BD^2}{2DG\cdot BG}=\dfrac{10+2-16}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\sin\angle DGB=\sqrt{1-\cos^2\angle DGB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

故二面角 $D-EQ-B$ 的平面角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



图②

11. (1)【证明】因为 E,F 分别是边 AB,AD 的中点,所以 $EF/\!/BD$. 因为 $EF\not\subset$ 平面 BCD,$BD\subset$ 平面 BCD,所以 $EF/\!/$ 平面 BCD.

(2)【证明】因为平面 $A_1BD\perp$ 平面 BCD,平面 $A_1BD\cap$ 平面 $BCD=BD$,$CD\subset$ 平面 BCD,$CD\perp BD$,所以 $CD\perp$ 平面 A_1BD. 因为 $A_1B\subset$ 平面 A_1BD,所以 $CD\perp A_1B$. 因为 $A_1B\perp A_1D$,$A_1D\cap CD=D$,A_1D,$CD\subset$ 平面 A_1CD,所以 $A_1B\perp$ 平

面 A_1CD. 因为 $A_1B\subset$平面 A_1BC,所以平面 $A_1BC\perp$平面 A_1CD.

(3)【解】A_1C 与 BD 不可能垂直,理由如下.

假设 $A_1C\perp BD$,因为 $CD\perp BD$,$A_1C\cap CD=C$,A_1C,$CD\subset$平面 A_1CD,所以 $BD\perp$平面 A_1CD. 因为 $A_1D\subset$平面 A_1CD,所以 $BD\perp A_1D$,与 $A_1B\perp A_1D$ 矛盾,故 A_1C 与 BD 不可能垂直.

能力上分

1. D 【解析】对于 A,若 $\alpha\perp\beta$,$m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,则 m,n 可能平行、相交或异面,**故 A 错误**;

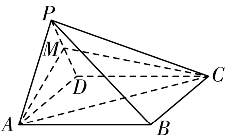
对于 B,若 m 不垂直于 α,且 $n\subset\alpha$,则 m 有可能与 n 异面垂直,**故 B 错误**;

对于 C,若 $m/\!/\alpha$,$\alpha/\!/\beta$,则 $m/\!/\beta$ 或 $m\subset\beta$,**故 C 错误**;

对于 D,若 m,n 是异面直线,$m\subset\alpha$,$m/\!/\beta$,$n\subset\beta$,$n/\!/\alpha$,则在直线 m 上任取一点 P,过直线 n 与点 P 确定平面 γ,设 $\gamma\cap\alpha=c$,又 $n/\!/\alpha$,则 $n/\!/c$,$n\subset\beta$,$c\not\subset\beta$,所以 $c/\!/\beta$,又 $m/\!/\beta$,$m\subset\alpha$,$c\subset\alpha$,$m\cap c=P$,所以 $\alpha/\!/\beta$,**故 D 正确**.

2. A 【解析】因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,$CD\subset$平面 $ABCD$,$CD\perp AD$,所以 $CD\perp$平面 PAD,又 $CD\subset$平面 PCD,故平面 $PCD\perp$平面 PAD.

取 PD 的中点 M,连接 AM,CM,如图所示,



平面 $PCD\cap$平面 $PAD=PD$,平面 $AM\subset$平面 PAD,

$\triangle PAD$ 为等边三角形,则 $AM\perp PD$,故 $AM\perp$平面 PCD,

则直线 AC 与平面 PCD 所成角即为 $\angle ACM$.

令 $BC=a$,则 $AB=\sqrt{2}a$,$AC=\sqrt{3}a$,$AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,故 $\sin\angle ACM=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{1}{2}$. **故选 A.**

3. C 【解析】对于①,由二面角 $A-BC-D$ 为直二面角,可得平面 $ABC\perp$平面 BCD,又因为平面 $ABC\cap$平面 $BCD=BC$,$CD\perp$

BC，且 $CD\subset$ 平面 BCD，

所以 $CD\perp$ 平面 ABC，**所以①正确**；

对于②，由 $CD\perp$ 平面 ABC，且 $AB\subset$ 平面 ABC，可得 $AB\perp CD$，

又因为 $AB\perp AC$，且 $AC\cap CD=C$，AC，$CD\subset$ 平面 ACD，

所以 $AB\perp$ 平面 ACD，**所以②正确**；

对于③，由 $AB\perp$ 平面 ACD，且 $AB\subset$ 平面 ABD，所以平面 $ABD\perp$ 平面 ACD，**所以③正确**；

对于④，因为 $CD\perp$ 平面 ABC，且 $CD\subset$ 平面 BCD，可得平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，

若平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，且平面 $ABD\cap$ 平面 $ABC=AB$，可得 $AB\perp$ 平面 BCD，

又因为 $BC\subset$ 平面 BCD，所以 $AB\perp BC$，

因为 AB 与 BC 不垂直，所以矛盾，所以平面 ABD 和平面 BCD 不垂直，**所以④错误. 故选 C.**

4. C 【解析】如图①所示，

取 AB 的中点 M，CD 的中点 N，连接 ME，MN，NF，EF，EN，易知 M，E，N，F 四点共面.

由 $\triangle EAB$ 是等腰直角三角形，$AE\perp BE$，

得 $ME\perp AB$，$MN\perp AB$，

又 $ME\cap MN=M$，

ME，$MN\subset$ 平面 $MENF$，

所以 $AB\perp$ 平面 $MENF$，

又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 EAB，所以平面 $ABCD\perp$ 平面 $MENF$，平面 $EAB\perp$ 平面 $MENF$，又平面 $EAB//$ 平面 FDC，所以平面 $FDC\perp$ 平面 $MENF$，

又 $EF\subset$ 平面 $MENF$，且 $EF\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $MENF\cap$ 平面 $ABCD=MN$，

所以 $EF\perp MN$，

又平面 $EAB//$ 平面 FDC，且平面 $EAB\cap$ 平面 $MENF=ME$，平面 $FDC\cap$ 平面 $MENF=NF$，所以 $ME//NF$，

则作出平面 $MENF$ 的示意图，如图②所示，

设 $EF\cap MN=O$，则 $\triangle OME\backsim\triangle ONF$，所以 $\dfrac{OM}{ON}=\dfrac{ME}{NF}$，

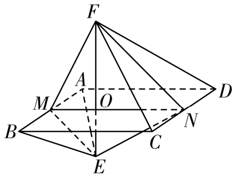
又 $ME=\dfrac{1}{2}AB=2$，$NF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$，则 $\dfrac{OM}{ON}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

由 $MN=AD=3+\sqrt{3}$，所以 $OM=\sqrt{3}$，$ON=$

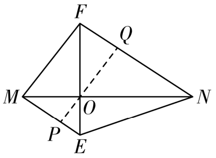
3，$\angle EMO=\angle FNO=30°$，

过点 O 作 $PQ\perp ME$ 与 ME,NF 分别交于点 P,Q，则 PQ 的长即为两平面间的距离.

$PQ=OP+OQ=\dfrac{1}{2}OM+\dfrac{1}{2}ON=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$，故选 C.



图①



图②

5. 3 【解析】$\because AB\perp$ 平面 BCD，$AB\subset$ 平面 ABD，$AB\subset$ 平面 ABC，

$\therefore$ 平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，又 $CD\subset$ 平面 BCD，$\therefore AB\perp CD$.

又 $BC\perp CD$，$AB\cap BC=B$，$AB,BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore CD\perp$ 平面 ABC.

又 $CD\subset$ 平面 ACD，$\therefore$ 平面 $ACD\perp$ 平面 ABC.

故互相垂直的平面有 3 对.

6. **思路导引** （1）由题意可求出 $AB=\sqrt{3}$，进而可知 $BC\perp AB$，由题可知 $PA\perp CB$，从而可证 $BC\perp$ 平面 PAB，再由线面平行的性质定理可得 $AD/\!/BC$，进而可得 $AD\perp$ 平面 PAB，再由线面垂直的性质可证 $AD\perp PB$.（2）（ⅰ）利用面面垂直的性质定理可得 $AQ\perp$ 平面 PCD，再利用线面垂直的性质可得 $AQ\perp CD$，进而可证 $CD\perp$ 平面 PAD，进而可证 $CD\perp AD$；（ⅱ）先找出二面角 $A-PC-D$ 的平面角，再在三角形中求解即可.

（1）【证明】在 $\triangle ABC$ 中，$AC=2$，$BC=1$，$\angle BAC=30°$，

由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$，

即 $1=AB^2+4-2\sqrt{3}AB$，解得 $AB=\sqrt{3}$，

$\because AB^2+BC^2=3+1=4=AC^2$，$\therefore BC\perp AB$.

$\because PA\perp$ 底面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PA\perp BC$，

$\because AB\cap PA=A$，$PA,AB\subset$ 平面 PAB，

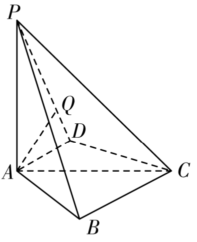
$\therefore BC\perp$ 平面 PAB，

$\because AD/\!/$ 平面 PBC，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $PBC\cap$ 平面 $ABCD=BC$，

$\therefore AD/\!/BC$，$\therefore AD\perp$ 平面 PAB，

$\because PB\subset$ 平面 PAB，$\therefore AD\perp PB$.

(2)(ⅰ)【证明】如图①所示,



图①

过点 A 作 $AQ\perp PD$ 于点 Q,

$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 PCD,平面 $PAD\cap$ 平面 $PCD=PD$,$AQ\subset$ 平面 PAD,

$\therefore AQ\perp$ 平面 PCD,

$\because CD\subset$ 平面 PCD,$\therefore AQ\perp CD$,

又$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$,$CD\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA\perp CD$,

$\because PA\cap AQ=A$,PA,$AQ\subset$ 平面 PAD,

$\therefore CD\perp$ 平面 PAD,

$\because AD\subset$ 平面 PAD,$\therefore CD\perp AD$.

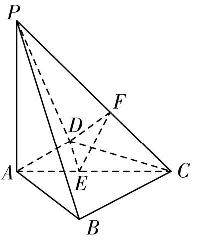
(ⅱ)【解】易知 $\angle CBA=90°$,

$\therefore \angle CBA=\angle CDA=90°$,

$\because CB=CD$,$AC=AC$,$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$,

$\therefore AD=AB=\sqrt{3}$.

如图②所示,



图②

过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E,过点 E 作 $EF\perp CP$ 于点 F,连接 DF.

$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$,$DE\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA\perp DE$,

$\because PA\cap AC=A$,PA,$AC\subset$ 平面 PAC,

$\therefore DE\perp$ 平面 PAC,

$\because PC\subset$ 平面 PAC,$\therefore DE\perp PC$,

又 $EF\perp PC$,$DE\cap EF=E$,DE,$EF\subset$ 平面 DEF,$\therefore PC\perp$ 平面 DEF,

$\because DF\subset$ 平面 DEF,$\therefore PC\perp DF$,

$\therefore \angle DFE$ 为二面角 $A-PC-D$ 的平面角,

$\because \angle CDA=90°$,$CD=1$,$AD=\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}AC\times DE=\dfrac{1}{2}\times2\times DE=DE$,

$\therefore DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由(i)知 $CD\perp$平面 PAD,

$\because PD\subset$平面 PAD, $\therefore CD\perp PD$,又 $PD=\sqrt{7}$, $PC=2\sqrt{2}$,

$\therefore S_{\triangle PDC}=\frac{1}{2}\times CD\times PD=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$,

又 $S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}\times PC\times DF=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times DF=\sqrt{2}DF$, $\therefore\frac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{2}DF$, $\therefore DF=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$.

由 $DE\perp$平面 PAC, $EF\subset$平面 PAC,知 $DE\perp EF$,在 Rt$\triangle DEF$ 中, $\sin\angle DFE=\frac{DE}{DF}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$.

即二面角 $A-PC-D$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$.

§5 节测上分

1. A　【解析】对于 A,若 $m\perp\alpha$, $n\perp\alpha$,则 $m/\!/n$,**故 A 正确**;

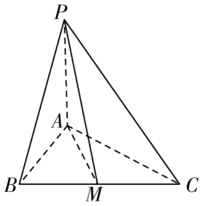
对于 B,若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$,则 α 与 β 可能平行或相交,**故 B 错误**;

对于 C,若 $\alpha\perp\beta$, $m\perp\beta$,则 $m/\!/\alpha$ 或 $m\subset\alpha$,**故 C 错误**;

对于 D,若 $\alpha\perp\beta$, $m\perp\alpha$, $n/\!/\beta$,则 m 与 n 可能相交、平行或异面,**故 D 错误. 故选 A.**

> **名师点拨**　**平行、垂直关系判断的选择题的注意点**
>
> (1)注意判定定理和性质定理中的关键点,比如线面垂直的判定定理中要求的"相交";(2)结合题意构造图形,结合图形进行判断,学会善用正方体、棱锥等;(3)会举反例或者用反证法推断结论是否正确.

2. B　【解析】如图,连接 AM,由 $PA\perp$平面 ABC, $AM\subset$平面 ABC,可知 $PA\perp AM$,所以 $PM=\sqrt{PA^2+AM^2}$,要求 PM 的最小值只需求出 AM 的最小值即可. 在$\triangle ABC$ 中,当 $AM\perp BC$ 时, AM 取得最小值,此时 $AM=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{2\times4}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,所以 PM 的最小值为$\sqrt{2^2+\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **故 B 正确.**



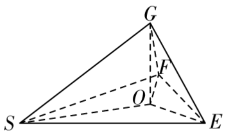
3. D 【解析】对于 A，依题意有 $DA\perp$ 平面 ABC，$DA\subset$ 平面 DAC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 DAC，**故 A 正确；**

对于 B，$DA\perp$ 平面 ABC，$CB\subset$ 平面 ABC，则有 $DA\perp CB$，又 AC 是圆 O 的直径，B 为圆周上不与点 A，C 重合的点，则有 $AB\perp CB$，又 $DA\cap AB=A$，DA，$AB\subset$ 平面 BAD，所以 $CB\perp$ 平面 BAD，**故 B 正确；**

对于 C，因为 $CB\perp$ 平面 BAD，$AN\subset$ 平面 BAD，所以 $CB\perp AN$，又 $AN\perp DB$ 于 N，$CB\cap DB=B$，CB，$DB\subset$ 平面 BCD，所以 $AN\perp$ 平面 BCD，又 $CD\subset$ 平面 BCD，则 $AN\perp CD$，又 $AM\perp DC$ 于 M，AN，$AM\subset$ 平面 AMN，$AN\cap AM=A$，所以 $CD\perp$ 平面 AMN，**故 C 正确；**

对于 D，平面 $AMN\cap$ 平面 $DAB=AN$，$DB\subset$ 平面 DAB，$AN\perp DB$ 于 N，若平面 $AMN\perp$ 平面 DAB，则必有 $DB\perp$ 平面 AMN，而 $MN\subset$ 平面 AMN，则必有 $DB\perp MN$，因为 $CB\perp$ 平面 BAD，$DB\subset$ 平面 BAD，则有 $CB\perp DB$，又 MN，$BC\subset$ 平面 DBC，则必有 $MN/\!/BC$，由于 DA 垂直于圆 O 所在的平面，$\angle DCA=45°$，则 $DA=AC$，而 $AM\perp DC$ 于 M，则 M 为 DC 中点，因为 AC 是圆 O 的直径，B 为圆周上不与点 A，C 重合的点，所以 $AB<AC=DA$，又 $AN\perp DB$ 于点 N，则 N 不是 DB 中点（否则会得到 $AB=AD$，与 $AB<AD$ 矛盾），所以 $MN/\!/BC$ 不成立，所以平面 AMN 与平面 DAB 不垂直，**故 D 错误.**

4. A 【解析】如图所示，连接 OF，OS，OE.

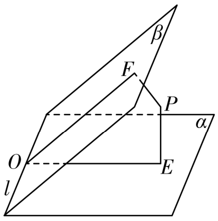


由题意知 $GS\perp GF$，$GE\perp GF$. 因为 GS，$GE\subset$ 平面 GES，$GS\cap GE=G$，所以 $GF\perp$ 平面 GES. 因为 $SE\subset$ 平面 GES，所以 $GF\perp SE$. 因为 $GO\perp$ 平面 SEF，$SE\subset$ 平面 SEF，所以 $GO\perp SE$. 又因为 GO，$GF\subset$ 平面 GFO，$GO\cap GF=G$，所以 $SE\perp$ 平面 GFO. 因为 $OF\subset$ 平面 GFO，所以 $SE\perp OF$. 同

理，$EF\perp OS$，$SF\perp OE$，则 O 是 $\triangle SEF$ 的垂心. **故 A 正确.**

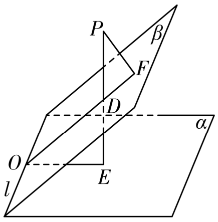
5. C　【解析】依题意，点 P 不在平面 α 和平面 β 内，当点 P 在二面角 $\alpha-l-\beta$ 内时，如图①，设直线 $l\cap$ 平面 $EPF=O$，连接 EO，FO，因为 $PE\perp\alpha$，$PF\perp\beta$，$l\subset\alpha$，$l\subset\beta$，所以 $l\perp PE$，$l\perp PF$，因为 $PE\cap PF=P$，PE，$PF\subset$ 平面 EPF，所以直线 $l\perp$ 平面 EPF，又 OE，$OF\subset$ 平面 EPF，所以 $l\perp OE$，$l\perp OF$，则 $\angle EOF$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角.

在四边形 $PEOF$ 中，$\angle PEO=\angle PFO=90^\circ$，$\angle EOF=60^\circ$，所以 $\angle EPF=120^\circ$.



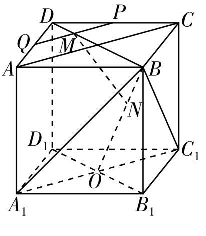
图①

当点 P 在二面角 $\alpha-l-\beta$ 外时，如图②，同理可得 $\angle EOF$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，令 $PE\cap OF=D$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DEO$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle DFP$ 中，$\angle ODE=\angle PDF$，则 $\angle EOF=\angle EPF=60^\circ$，所以 $\angle EPF$ 的大小为 60° 或 120°. **故选 C.**



图②

6. C　【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 AC，B_1D_1，BD，设 B_1D_1 交 A_1C_1 于 O，BD 交 PQ 于 M，连接 OB，过 M 作 $MN\perp OB$ 于 N，如图所示.



因为 P，Q 分别为 CD 和 AD 的中点，所以 $PQ/\!/AC$，

又在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1/\!/CC_1$ 且 $AA_1=CC_1$，

所以四边形 AA_1C_1C 是平行四边形，从而可得 $A_1C_1/\!/AC$，

所以 $A_1C_1 // PQ$，又因为 $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1B，$PQ \not\subset$ 平面 A_1C_1B，

所以 $PQ //$ 平面 A_1C_1B，所以 PQ 到平面 A_1C_1B 的距离即为点 M 到平面 A_1C_1B 的距离.

由四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是正方形可得 $A_1C_1 \perp B_1D_1$，

由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的性质，可得 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，又 $A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

所以 $BB_1 \perp A_1C_1$，又 $B_1D_1 \cap B_1B = B_1$，$B_1D_1, B_1B \subset$ 平面 D_1B_1BD，

所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 D_1B_1BD，又 $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1B，所以平面 $A_1C_1B \perp$ 平面 D_1B_1BD，

又平面 $A_1C_1B \cap$ 平面 $D_1B_1BD = OB$，$MN \perp OB$，$MN \subset$ 平面 D_1B_1BD，所以 $MN \perp$ 平面 A_1C_1B，所以 MN 的长度即为点 M 到平面 A_1C_1B 的距离.

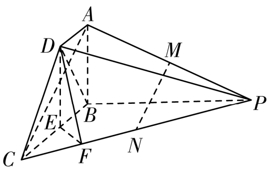
在 $\mathrm{Rt}\triangle OB_1B$ 中，可得 $\cos\angle OBB_1 = \dfrac{BB_1}{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{BB_1^2+OB_1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{BB_1^2+\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{A_1B_1^2+A_1D_1^2}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\sin\angle DBO = \sin(90° - \angle OBB_1) = \cos\angle OBB_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

又易求得 $BM = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

所以 $MN = BM \times \sin\angle DBO = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \times \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **故 C 正确.**

7. (1)【**证明**】如图，连接 AC.

因为 M 为棱 AP 的中点，N 为棱 CP 的中点，所以 $MN // AC$，又 $MN \not\subset$ 平面 $ABCD$，$AC \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $MN //$ 平面 $ABCD$.



(2)【**证明**】在四边形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$\angle ABC = 90°$，$2AB = 2AD = \sqrt{2}CD = BC = 2$，

则 $AB = AD = 1$，$CD = \sqrt{2}$，$BC = 2$，连接 BD，

则 $BD = \sqrt{AD^2+AB^2} = \sqrt{2}$，则 $BD^2 + CD^2 =$

BC^2，则 $CD\perp DB$，所以 $\triangle ABD$，$\triangle BCD$ 都是等腰直角三角形.

又平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle PBC=90°$，

即 $PB\perp BC$，平面 $PBC\cap$ 平面 $ABCD=BC$，

$PB\subset$ 平面 PBC，所以 $PB\perp$ 平面 $ABCD$.

又 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PB\perp CD$.

又 $PB\cap DB=B$，PB，$DB\subset$ 平面 PBD，所以 $CD\perp$ 平面 PBD.

又 $PD\subset$ 平面 PBD，所以 $CD\perp PD$.

(3)【解】由(2)知，$PB\perp$ 平面 $ABCD$，则 $\angle PDB$ 为直线 PD 与底面 $ABCD$ 所成的角，则 $\cos\angle PDB=\frac{DB}{PD}=\frac{\sqrt{2}}{PD}=\frac{1}{3}$，所以 $PD=3\sqrt{2}$，

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BP\perp BD$，则 $PB=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=4$.

如图，取 BC 的中点 E，连接 DE，过 E 作 PC 的垂线交 PC 于 F，

连接 DF，易知 $DE\perp BC$，$DE\subset$ 平面 $ABCD$，

平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PBC\cap$ 平面 $ABCD=BC$，则 $DE\perp$ 平面 PBC.

因为 $PC\subset$ 平面 PBC，所以 $DE\perp PC$，又 $EF\perp PC$，EF，$DE\subset$ 平面 DEF，$EF\cap DE=E$，所以 $PC\perp$ 平面 DEF.

又 $DF\subset$ 平面 DEF，所以 $DF\perp PC$，

则 $\angle DFE$ 即为二面角 $B-PC-D$ 的平面角.

易知 $\triangle CFE\backsim\triangle CBP$，所以 $\frac{CF}{EF}=\frac{CB}{PB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，则 $CF=\frac{1}{2}EF$.

又 $CE=DE=\frac{1}{2}BC=1$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle CEF$ 中，

由勾股定理得 $CF^2+EF^2=CE^2=1$，

则 $EF=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\angle DFE=\frac{DE}{EF}=\frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，即二面角 $B-PC-D$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

规律方法 二面角的求解方法

(1)作出辅助线，找到二面角的平面角，并结合余弦定理或勾股定理进行求解.

(2)建立空间直角坐标系，求出平面的法向量，利用空间向量相关公式求解(以后学习).

(3)利用其中一个半平面上的图形在另一个半平面所在平面的投影图形面积与原图形的面积之比求解二面角的余弦值,若二面角的平面角为钝角,所得结果需取相反数,进而求得二面角的大小.

(4)求出一个半平面上一点到另一个半平面所在平面的距离和此点到棱的距离之比即为二面角的正弦值,进而求得二面角的大小.

8. (1)【**证明**】因为平面 $PAC\perp$ 平面 ABC, $PA\subset$平面 PAC, $PA\perp AC$,平面 $PAC\cap$平面 $ABC=AC$,所以 $PA\perp$平面 ABC.

又 $BC\subset$平面 ABC,所以 $PA\perp BC$.

因为 $PA=1$, $PC=\sqrt{3}$, $PA\perp AC$,所以 $AC=\sqrt{PC^2-PA^2}=\sqrt{2}$.

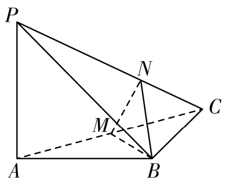
因为 $AB=BC=1$,所以 $AC^2=AB^2+BC^2$,所以 $AB\perp BC$.

又 $PA\perp BC$, PA, AB 是平面 PAB 内的两条相交直线,所以 $BC\perp$平面 PAB.

因为 $BC\subset$平面 PBC,所以平面 $PBC\perp$平面 PAB.

(2)【**解**】存在,当$\frac{PN}{PC}=\frac{2}{3}$时, $PC\perp$平面 BMN. 理由如下:

如图,过点 M 作 $MN\perp PC$,垂足为 N,连接 BN.



由(1)知 $PA\perp$平面 ABC, $MB\subset$平面 ABC,所以 $PA\perp MB$.

因为点 M 为 AC 的中点, $AB=BC=1$,所以 $MB\perp AC$.

因为 PA, AC 是平面 PAC 内的两条相交直线,所以 $MB\perp$平面 PAC.

因为 $PC\subset$平面 PAC,所以 $MB\perp PC$,

又 $MN\perp PC$, MB, MN 是平面 BMN 内的两条相交直线,所以 $PC\perp$平面 BMN.

由已知得 $\sin\angle PCA=\frac{PA}{PC}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{MN}{MC}$,

又 $MC=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,即 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{MN}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$,解得

$MN=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

又 $CN=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $PN=PC-CN=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则$\frac{PN}{PC}=\frac{2}{3}$.

故当$\frac{PN}{PC}=\frac{2}{3}$时，$PC\perp$平面 BMN.

§6　简单几何体的再认识

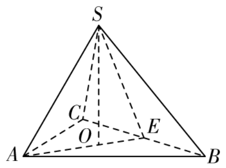
6.1　柱、锥、台的侧面展开与面积+6.2　柱、锥、台的体积

对点上分

1. B　【解析】设这个圆柱和圆锥的底面半径为 r，因为圆柱的轴截面是一个正方形，所以其高 $h=2r$，则圆柱的侧面积 $S_1=2\pi r\times 2r=4\pi r^2$，圆锥的侧面积 $S_2=\pi r\sqrt{(2r)^2+r^2}=\sqrt{5}\pi r^2$，则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi r^2}{\sqrt{5}\pi r^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **故选 B.**

2. B　【解析】设正方体的棱长为 $x(x>0)$，则正四面体 $B-A_1C_1D$ 的棱长为 $\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$，所以正四面体 $B-A_1C_1D$ 的表面积 $S_{B-A_1C_1D}=4\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}x\times\sqrt{2}x\sin 60°=2\sqrt{3}x^2=a^2$，所以 $x^2=\frac{a^2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}a^2}{6}$，所以正方体的表面积 $S_{正方体ABCD-A_1B_1C_1D_1}=6x^2=\sqrt{3}a^2$. **故 B 正确.**

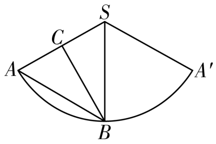
3. B　【解析】如图，在正三棱锥 $S-ABC$ 中，SO 是高，则 O 为正三角形 ABC 的中心，连接 AO 并延长交 BC 于点 E，则 E 为 BC 的中点，且 $SE\perp BC$.



依题意，$SO=1$，正三角形 ABC 的边长为 2，所以 $AE=2\sin\ 60°=\sqrt{3}$，$OE=\frac{1}{3}AE=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$SE=\sqrt{SO^2+OE^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$S_{\triangle SBC}=\frac{1}{2}BC\cdot SE=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以该三

棱锥的侧面积为 $3S_{\triangle SBC}=2\sqrt{3}$. 故 B 正确.

4. B 【解析】作出侧面展开图如图所示，可得 $\angle CAB$，$\angle CBA$ 为锐角，故 $BC\perp SA$.

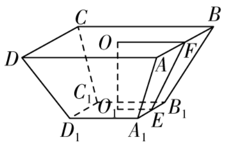


由 $SC=CA$，可得 $BS=BA$，即 $\triangle ASB$ 为等边三角形，所以 $\angle ASA'=\dfrac{2\pi}{3}$，则圆锥的侧面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{3}\times16=\dfrac{16\pi}{3}$，$\overset{\frown}{AA'}=\dfrac{2\pi}{3}\times4=\dfrac{8\pi}{3}$. 设圆锥的底面圆半径为 r，则 $\overset{\frown}{AA'}=2\pi r$，所以 $r=\dfrac{4}{3}$，所以底面积为 $\pi r^2=\dfrac{16\pi}{9}$，所以圆锥 SO 的表面积为 $\dfrac{16\pi}{9}+\dfrac{16\pi}{3}=\dfrac{64\pi}{9}$. 故 B 正确.

5. $5\sqrt{35}$ 【解析】依题意，圆台上底面周长为 $\dfrac{\pi}{3}\cdot OA=10\pi$ cm，则圆台上底面半径 $r_1=5$ cm，圆台下底面周长为 $\dfrac{\pi}{3}\cdot OB=20\pi$ cm，则圆台下底面半径 $r_2=10$ cm，圆台轴截面是等腰梯形，上、下底边长分别为 10 cm，20 cm，腰长为 30 cm，所以圆台的高，即等腰梯形的高为 $\sqrt{30^2-(10-5)^2}=5\sqrt{35}$(cm).

即制成的简易笔筒的高为 $5\sqrt{35}$ cm.

6. $600\sqrt{2}$ 【解析】如图，由题意知该“升子”的各侧面是两底边长分别为 20 cm，10 cm，腰长为 15 cm 的等腰梯形.

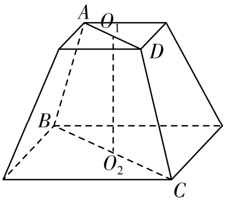


设两底面的中心分别为 O，O_1，取 AB，A_1B_1 的中点 F，E，连接 OO_1，O_1E，EF，FO，所以侧面的高 $EF=\sqrt{AA_1^2-\left(\dfrac{AB-A_1B_1}{2}\right)^2}=\sqrt{15^2-\left(\dfrac{20-10}{2}\right)^2}=10\sqrt{2}$(cm).

若将各侧面展开，则可拼接成一个一条边长为 60 cm，另一条边长为 15 cm 的平行四边形，且较长边上的高为 $10\sqrt{2}$ cm，所

以所求面积为 $10\sqrt{2}\times60=600\sqrt{2}(cm^2)$.

7. B 【解析】设正四棱台的上、下底面中心分别为 O_1,O_2,连接 O_1O_2,则 O_1O_2 即为正四棱台的高,如图所示.



取过正四棱台的轴 O_1O_2 和侧棱 AB,CD 的截面 $ABCD$,易知 $AD=4,BC=8$,

所以可得截面是上底为4,下底为8,腰长为 $2\sqrt{5}$ 的等腰梯形,则 $O_1O_2=\sqrt{AB^2-\left(\frac{BC-AD}{2}\right)^2}=\sqrt{20-2^2}=4$,所以正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}[(2\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2+\sqrt{8\times32}]\times4=\frac{224}{3}$. **故选 B.**

8. B 【解析】由已知可得四片瓦的体积 $V=\pi\times12^2\times20-\pi\times10^2\times20=880\pi(cm^3)$,所以500名学生每人制作四片瓦共需黏土的体积为 $500\times880\pi=440\ 000\pi\approx1.381\ 6(m^3)$. **故 B 正确.**

9. D 【解析】因为 $V_1=\frac{1}{3}S_{四边形B_1C_1ED}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{2}\times(1+2)\times1\right]\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $V_2=V_{E-A_1FD}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times1\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$, $V_3=V_{E-AFD}=V_{E-A_1FD}=V_2=\frac{\sqrt{3}}{8}$,所以 $V_1>V_2=V_3$, $2V_1\neq3V_2$, $V_1=V_2+V_3$. **故 D 正确.**

快解 因为三棱锥 $F-A_1DE$ 与三棱锥 $A-DEF$ 拼成三棱锥 $D-AEA_1$,易知三棱锥 $D-AEA_1$ 与四棱锥 $A_1-B_1C_1ED$ 的高相等,且 $S_{\triangle AEF}+S_{\triangle EFA_1}=S_{四边形B_1C_1ED}$,所以 $V_1=V_2+V_3$.

10. C 【解析】设圆台的上、下底面半径分别为 r,R,依题意得 $2\pi r=\frac{2\pi}{3}\times3$,解得 $r=1$, $2\pi R=\frac{2\pi}{3}\times6$,解得 $R=2$,圆台的母线长 $l=6-3=3$,故圆台的高 $h=\sqrt{l^2-(R-r)^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$,**故 A,B 正确;**

圆台的侧面积 $S_{圆台侧}=\pi\times(1+2)\times3=9\pi$，故 C 错误；

圆台的体积 $V_{圆台}=\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times(\pi+4\pi+\sqrt{\pi\times4\pi})=\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi$，故 D 正确. 故选 C.

归纳总结 柱体、锥体、台体的体积之间的关系

$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{SS'}+S)h$ —— $S'=S$ → $V_{柱体}=Sh$；$S'=0$ → $V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$

其中，S'，S 分别为台体上、下底面面积，h 为柱体、锥体、台体的高.

11. BCD 【解析】因为圆锥的底面半径 $r=3$，母线长 $l=4$，所以圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

对于 A，因为圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{底}h=\frac{1}{3}\pi\times3^2\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}\pi$，故 A 错误.

对于 B，因为圆锥的底面半径为 3，所以圆锥的底面周长为 6π，又因为圆锥的母线长为 4，所以圆锥的侧面展开图的圆心角为 $\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，故 B 正确.

对于 C，设圆锥的两条母线的夹角为 θ，过这两条母线作截面，其面积 $S_1=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin\theta=8\sin\theta$. 设圆锥轴截面三角形的顶角为 θ_1，则 $\theta\leqslant\theta_1$，由题可知 $\cos\theta_1=\frac{16+16-36}{2\times4\times4}=-\frac{1}{8}<0$，所以 θ_1 为钝角. 所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，面积有最大值，最大值为 8，故 C 正确.

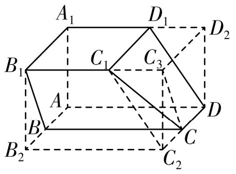
对于 D，圆锥的侧面积 $S_2=\frac{1}{2}\times2\pi\times3\times4=12\pi$，故 D 正确. 故选 BCD.

12. B

攻略上分 根据题意，六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 可以看成长方体的一部分，通过补形构造易于求解体积的长方体，再结合柱体体积和锥体体积，用该长方体的体积减去多余部分的体积即可求解.

【解析】如图，将六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 补形为长方体 AB_2C_2D-

$A_1B_1C_3D_2$，连接 C_1C_2，在长方体 $AB_2C_2D-A_1B_1C_3D_2$ 中，$AB_2=AD=10$，$AA_1=6$. 根据题意可知，六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 可以看成长方体 $AB_2C_2D-A_1B_1C_3D_2$ 的一部分.



因为长方体 $AB_2C_2D-A_1B_1C_3D_2$ 的体积 $V=S_{\text{四边形}AB_2C_2D}\times AA_1=10\times10\times6=600$；直三棱柱 $BB_1B_2-CC_3C_2$ 的体积 $V_1=S_{\triangle BB_1B_2}\times B_2C_2=\frac{1}{2}\times(10-6)\times6\times10=120$；直三棱柱 $C_1C_2C_3-D_1DD_2$ 的体积 $V_2=S_{\triangle C_1C_2C_3}\times DC_2=\frac{1}{2}\times(10-6)\times6\times10=120$；三棱锥 $C-C_1C_2C_3$ 的体积 $V_3=\frac{1}{3}\times S_{\triangle C_1C_2C_3}\times CC_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(10-6)\times6\times(10-6)=16$，所以六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V-V_1-V_2+V_3=600-120-120+16=376$. **故 B 正确.**

13. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　【解析】要使堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积最大，则只需要 $\triangle ABC$ 的面积最大即可.

在 Rt $\triangle ACB$ 中，$AC^2+BC^2=AB^2=8$，则 $8=AC^2+BC^2\geqslant 2AC\cdot BC$，即 $AC\cdot BC\leqslant 4$，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\leqslant\frac{1}{2}\times4=2$，当且仅当 $AC=BC$ 时取等号，即堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积最大时，$AC=BC=2$，此时阳马 $B-A_1ACC_1$ 的体积

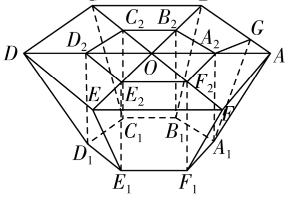
提示：此几何体为阳马，由题可知侧棱 BC 垂直于底面 A_1ACC_1

$V=\frac{1}{3}AC\cdot AA_1\cdot BC=\frac{1}{3}\times2\times2\sqrt{2}\times2=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

14. A　【解析】由题知该组合体上半部分为圆锥，由于其母线长为 $2\sqrt{3}$ 米，轴截面是面积为 $3\sqrt{3}$ 平方米的等腰钝角三角形，设其高为 h，底面半径为 r，则有 $\begin{cases}h^2+r^2=12,\\ \frac{1}{2}\times2r\times h=3\sqrt{3},\\ r>h,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=3,\\ h=\sqrt{3},\end{cases}$ 则该组合

体上半部分圆锥的侧面积 $S_1=\pi\times3\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}\pi$(平方米). 下半部分圆柱的侧面积 $S_2=2\pi\times3\times2.5=15\pi$(平方米),则该组合体的表面积(不含底面)为 $S_1+S_2=(6\sqrt{3}+15)\pi$(平方米). **故 A 正确.**

15. A 【解析】正六棱柱的六个侧面面积之和为 $2\times6\times6=72(\text{dm}^2)$,正六棱柱的底面面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times6=6\sqrt{3}(\text{dm}^2)$. 如图所示,正六棱台 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中,$A_1B_1=2$ dm,$AB=4$ dm,过点 A_1,B_1,C_1,D_1,E_1,F_1 分别作 $A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2,D_1D_2,E_1E_2,F_1F_2$ 垂直于底面 $ABCDEF$ 于点 A_2,B_2,C_2,D_2,E_2,F_2,连接 $A_2B_2,B_2C_2,C_2D_2,D_2E_2,E_2F_2,F_2A_2$,连接 AD,BE,CF 相交于点 O,则 A_2,B_2,C_2,D_2,E_2,F_2 分别为 OA,OB,OC,OD,OE,OF 的中点,过点 A_2 作 $A_2G\perp AB$ 于点 G,连接 A_1G,则 A_1G 为正六棱台的斜高,其中 $A_1A_2=1$ dm,$AG=\frac{AB-A_2B_2}{2}=1(\text{dm})$,$AA_2=\frac{1}{2}AO=2$ dm,由勾股定理得 $A_2G=\sqrt{A_2A^2-AG^2}=\sqrt{3}(\text{dm})$,故 $A_1G=\sqrt{A_2G^2+A_1A_2^2}=2(\text{dm})$,所以正六棱台的斜高为 2 dm,故正六棱台的侧面积为 $\frac{1}{2}\times(4+2)\times2\times6=36(\text{dm}^2)$,又正六棱台的下底面面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2\times6=24\sqrt{3}(\text{dm}^2)$,所以该宫灯的表面积为 $72+6\sqrt{3}+36+24\sqrt{3}=108+30\sqrt{3}(\text{dm}^2)$. **故 A 正确.**

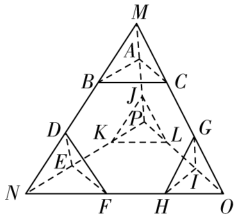


易错警示 **求组合体的表面积时考虑不全致错**

解决此类求组合多面体表面积的问题时,切忌直接套用柱、锥、台体的表面积公式,应先分析该组合体由哪些简单几何体组成,几何体各个面间有无重叠,再结合相应几何体选择公式计算求解.

16. $16(6\sqrt{3}-\pi)$　【解析】工件加工后的表面积 $S=4\times4\times6+48\sqrt{3}+2\pi a\times4-2\pi a^2$，要使工件加工后的表面积最大，则 $2\pi a\times4-2\pi a^2$ 取得最大值. 令 $f(a)=8\pi a-2\pi a^2=-2\pi\cdot(a-2)^2+8\pi$，当 $a=2$ 时，$f(a)$ 取得最大值，此时加工后的工件体积 $V=\left(6\times\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}-4\pi\right)\times4=16(6\sqrt{3}-\pi)(\text{cm}^3)$.

17.【解】(1)如图，补全正四面体，正四面体 $M-ABC$ 的棱长为正四面体 $M-PNO$ 的棱长的$\frac{1}{3}$，因为棱长为 a 的正四面体的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times\sin60°\times\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$，所以 $\frac{V_{M-ABC}}{V_{M-PNO}}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，所以截去部分的体积为 $\frac{4}{27}V_{M-PNO}$，剩下部分的体积为$\frac{23}{27}V_{M-PNO}$，所以石凳的体积与原正四面体的体积之比为$\frac{23}{27}V_{M-PNO}:V_{M-PNO}=\frac{23}{27}$.



(2)因为正四面体 $M-PNO$ 的棱长为 60 cm，所以 $S_{\triangle MNO}=\frac{1}{2}\times60^2\times\sin60°=900\sqrt{3}(\text{cm}^2)$，$S_{\triangle MBC}=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times20^2\times\sin60°=100\sqrt{3}(\text{cm}^2)$，

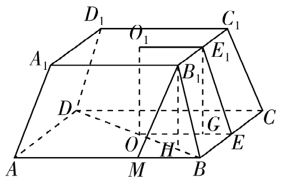
所以 $S_{六边形BCGHFD}=S_{\triangle MNO}-3S_{\triangle MBC}=600\sqrt{3}(\text{cm}^2)$，所以石凳的表面积 $S=4(S_{六边形BCGHFD}+S_{\triangle ABC})=2\,800\sqrt{3}\approx4\,844(\text{cm}^2)$，

即石凳的表面积约为 0.484 4 m^2，所以粉刷一个石凳约需要 $0.484\,4\times50=24.22$(元).

18. ABD　【解析】设正四棱台的高为 h，上、下底面面积分别为 $S_上$，$S_下$，则正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}(S_上+S_下+\sqrt{S_上\cdot S_下})h=\frac{1}{3}\times(4^2+$

$6^2+\sqrt{4^2\times6^2}\,)\times\sqrt{3}=\dfrac{76\sqrt{3}}{3}$,**故 A 正确**;

设上、下底面的中心分别为 O_1,O,连接 OO_1,则 $OO_1=\sqrt{3}$,分别取 BC 和 B_1C_1 的中点 E,E_1,连接 OE,EE_1,E_1O_1,则 $OE\perp BC$,$EE_1\perp BC$,所以 $\angle OEE_1$ 即为二面角 B_1-BC-A 的平面角,过点 E_1 作 $E_1G\perp OE$ 于点 G,则 $E_1G=\sqrt{3}$,$EG=\dfrac{6-4}{2}=1$,在 $\mathrm{Rt}\triangle GEE_1$ 中,$\tan\angle GEE_1=\dfrac{E_1G}{EG}=\sqrt{3}$,因为 $\angle GEE_1\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $\angle GEE_1=\dfrac{\pi}{3}$,所以二面角 B_1-BC-A 的大小为$\dfrac{\pi}{3}$,**故 B 正确**;



连接 BD,过点 B_1 作 $B_1H\perp BD$ 于点 H,则易知 $B_1H\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $B_1H=\sqrt{3}$,$BH=\dfrac{6\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$,$\angle HBB_1$ 即为直线 BB_1 与平面 $ABCD$ 所成角,而 $BB_1=\sqrt{BH^2+B_1H^2}=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$,所以 $\sin\angle HBB_1=\dfrac{B_1H}{BB_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,所以直线 BB_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,**故 C 错误**;

因为 $AB/\!/CD$,所以 AB 与 BB_1 所成角就是异面直线 BB_1 与 CD 所成角,即 $\angle ABB_1$ 或其补角就是所求,过点 B_1 作 $B_1M/\!/AA_1$,交 AB 于点 M,则四边形 AA_1B_1M 是平行四边形,所以 $B_1M=AA_1=BB_1=\sqrt{5}$,$AM=A_1B_1=4$,所以 $BM=AB-AM=6-4=2$,在 $\triangle BB_1M$ 中,$\cos\angle ABB_1=\dfrac{BM^2+BB_1^2-B_1M^2}{2BM\cdot BB_1}=\dfrac{2^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,则 $\sin\angle ABB_1=\sqrt{1-\cos^2\angle ABB_1}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $\tan\angle ABB_1=\dfrac{\sin\angle ABB_1}{\cos\angle ABB_1}=2$,所以异面直

线 BB_1 与 CD 所成角的正切值为 2，**故 D 正确.**

6.3　球的表面积和体积

对点上分

1. A　【解析】设球 O 的半径为 R，依题意得 $OO_1^2+r_1^2=R^2=OO_2^2+r_2^2$，则 $(4-OO_2)^2+1=OO_2^2+9$，解得 $OO_2=1$，因此 $R^2=10$，所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=40\pi$. **故 A 正确.**

2. C　【解析】球的半径 $R=24$ cm，上球冠的高 $h_1=6$ cm，下球冠的高 $h_2=4$ cm，设下底面圆的半径为 r，则 $r^2=24^2-20^2=176(\text{cm}^2)$，所以该瓷器的外表面面积为 $4\pi\times24^2-2\pi\times24\times6-2\pi\times24\times4+\pi\times176=2\ 000\pi\approx6\ 280(\text{cm}^2)$. **故 C 正确.**

3. D　【解析】此鼎主体部分的容积约为 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3+\pi R^2\cdot R=\frac{5}{3}\pi R^3$，此鼎主体部分表面积约为 $\frac{1}{2}\times4\pi R^2+2\pi R\cdot R=4\pi R^2$. **故 D 正确.**

4. D　【解析】因为正四棱台的上、下底面边长分别为$\sqrt{2}$和 $3\sqrt{2}$，

所以上、下底面正方形外接圆半径依次为$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$，$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=3$，

根据对称性可知，该棱台外接球的球心在棱台上、下底面外接圆的圆心的连线上.

设该棱台外接球的球心 O 到上底面的距离为 h，该棱台外接球的半径为 R，

所以 $R^2=1+h^2=9+(2\sqrt{2}-h)^2$，解得 $h=2\sqrt{2}$，$R=3$，

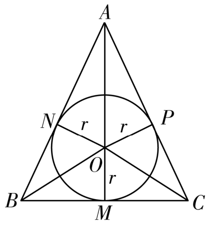
故所求体积为$\frac{4}{3}\times\pi\times3^3=36\pi$. **故选 D.**

5. D　【解析】如图，$\triangle ABC$ 为圆锥的轴截面，其中 $BC=2$，$AB=AC=3$，且 M 为 BC 边上的中点，设内切圆的圆心为 O.

由于 $AM=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

设内切圆半径为 r，则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times AB\times r+\frac{1}{2}\times BC\times r+\frac{1}{2}\times AC\times r=\frac{1}{2}\times(3+3+2)\times r=2\sqrt{2}$，

解得 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故所求球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$. **故选** D.

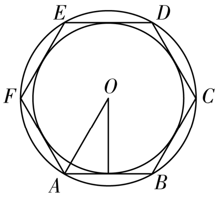


6. D　【解析】因为半径为 $2\sqrt{3}$ 的球与正六棱柱的各个面均相切，所以正六棱柱的高 $h=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，底面正六边形的内切圆半径为 $2\sqrt{3}$.

如图所示，正六边形外心和内心是同一点，根据内切圆半径和外接圆半径的关系，可得底面正六边形的外接圆半径 $r=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}=4$，

所以该正六棱柱外接球半径为 $R=\sqrt{r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$，

所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=112\pi$. **故选** D.



7. D　【解析】由于该正方体魔方的棱长为 2，故其外接球的半径为 $\sqrt{3}$，

当正四面体盒子的棱长最小时，正四面体内切球的半径为 $\sqrt{3}$.

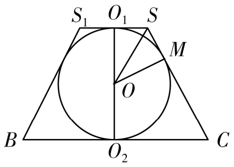
设正四面体棱长为 a，其高为 $\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，

根据等体积法得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}$，解得 $a=6\sqrt{2}$. **故选** D.

8. D

攻略上分　本题为圆台的内切球问题，可利用大招攻略 51 中的圆台模型求得内切球半径，进而结合题目条件求解.

【解析】如图为几何体的轴截面，O_1,O_2 分别为上、下底面中心，O 为球心，M 为球与母线的切点，



则 $\angle OMS=\angle OO_1S=90°$，

因为 $OO_1=OM=R,OS=OS$，

所以 $\triangle OMS$ 与 $\triangle OO_1S$ 全等，所以 $SM=O_1S=r_1$，同理可得 $CM=r_2$，

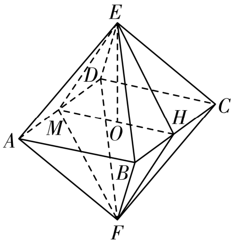
所以圆台母线长 $l=r_1+r_2$.

所以 $2R=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$，则 $R^2=r_1r_2=4r_1+r_2$，化简得 $r_2=\dfrac{4r_1}{r_1-1}(r_1>1)$，

所以圆台的侧面积为 $\pi(r_1+r_2)l=\pi(r_1+r_2)^2=\pi\left(r_1+\dfrac{4r_1}{r_1-1}\right)^2=\pi\left(r_1-1+\dfrac{4}{r_1-1}+5\right)^2\geqslant\pi\left[2\sqrt{(r_1-1)\times\dfrac{4}{r_1-1}}+5\right]^2=81\pi$，

当且仅当 $r_1-1=\dfrac{4}{r_1-1}$，即 $r_1=3$ 时等号成立，故圆台侧面积的最小值为 81π. **故选 D.**

9. D 【解析】如图，设正方形 $ABCD$ 的中心为 O，BC,AD 的中点分别为 H,M，连接 MH,EO,EH,MF,HF,EM.



设金刚石的棱长为 a，则 $8\times\dfrac{1}{2}a^2\sin 60°=2\sqrt{3}a^2=18\sqrt{3}$，所以 $a=3$.

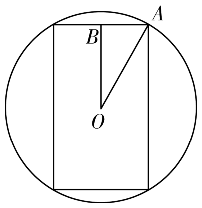
在等边三角形 EBC 中，BC 边上的高 $EH=\sqrt{EC^2-CH^2}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

在 Rt $\triangle EOH$ 中，$EO=\sqrt{EH^2-OH^2}=\sqrt{\dfrac{27}{4}-\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. 根据题意，最大球即为金刚石的内切球，由对称性易知内切球的球心在 O 点，内切球与 $\triangle EBC$ 的切点在线段 EH 上，球的半径即为截面 $EMFH$ 内切圆的半径，设内切圆半径为 r，由等

面积法可知 $S_{\triangle EMH}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times 3\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot r$，解得 $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以内切球的半径 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则内切球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$. **故 D 正确.**

10. $\frac{32\pi}{3}$　【解析】作圆柱的轴截面，如图.

由题意可知 $OB=\sqrt{3}$，$AB=1$，则球 O 的半径 $R=OA$，且 $OA^2=OB^2+AB^2=3+1=4$，所以 $R=2$，所以球 O 的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times 2^3=\frac{32\pi}{3}$.



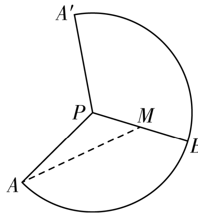
§ 6 节测上分

1. D　【解析】因为三棱柱的高为 6，其底面三角形 ABC 水平放置的直观图（斜二测画法）为 $\triangle A'B'C'$，其中 $O'A'=O'B'=2$，$O'C'=\sqrt{3}$，所以三棱柱的底面面积为 $\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，体积为 $4\sqrt{3}\times 6=24\sqrt{3}$. **故 D 正确.**

2. AB　【解析】设球的半径为 R，则圆柱的底面圆的半径为 R，高为 $2R$，则 $S_{球}=4\pi R^2$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，$S_{圆柱}=2\pi R^2+2\pi R\cdot 2R=6\pi R^2$，$V_{圆柱}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$，所以 $S_{圆柱}:S_{球}=6\pi R^2:4\pi R^2=3:2$，**故 A 正确**；$V_{圆柱}:V_{球}=2\pi R^3:\frac{4}{3}\pi R^3=3:2$，**故 B 正确**；$S_{圆柱}:V_{圆柱}=6\pi R^2:2\pi R^3=3:R$，**故 C 错误**；$S_{球}:V_{球}=4\pi R^2:\frac{4}{3}\pi R^3=3:R$，**故 D 错误.**

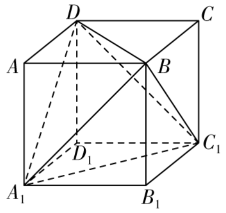
3. D　【解析】设圆锥的母线长为 l，由题知 $4\pi+2\pi l=10\pi$，解得 $l=3$，所以 $PM=\frac{3}{2}$. 将圆锥侧面展开，A' 点与 A 点重合，连接 AM，AM 即为从 A 点到 M 点的最近路线，如图所示. 因为 $\frac{2\pi r}{l}=\frac{4\pi}{3}$，所以 $\angle APB=$

$\dfrac{2\pi}{3}$,所以在$\triangle PAM$中,$AM^2=PA^2+PM^2-2PA\cdot PM\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}=9+\dfrac{9}{4}-2\times3\times\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{63}{4}$,所以$AM=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$. **故 D 正确.**



4. A 【解析】设原圆柱的底面圆半径为r,高为h,则原圆柱的表面积为$2\pi r^2+2\pi rh$,新几何体的表面积为$2\pi r^2+2\pi rh+2rh$,故$2rh=10$,故原圆柱的侧面积为$2\pi rh=10\pi$. **故 A 正确.**

5. C 【解析】如图,设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为a,易得$V_{B_1-A_1BC_1}=V_{A-A_1BD}=V_{D_1-A_1DC_1}=V_{C-C_1BD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}a^2\cdot a=\dfrac{1}{6}a^3$,所以$V_{B-A_1DC_1}=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-4V_{B_1-A_1BC_1}=a^3-4\times\dfrac{1}{6}a^3=\dfrac{1}{3}a^3=72$,解得$a=6$,故正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 6. **故 C 正确.**



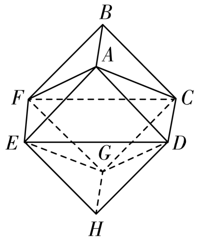
6. C 【解析】设圆锥甲、乙的母线长为R,高分别为$h_甲$,$h_乙$,底面圆的半径分别为$r_甲$,$r_乙$,侧面展开图的圆心角分别为$\alpha_甲$,$\alpha_乙$. 因为$\dfrac{S_甲}{S_乙}=2$,所以$\dfrac{\frac{1}{2}\alpha_甲 R^2}{\frac{1}{2}\alpha_乙 R^2}=2$,得$\dfrac{\alpha_甲}{\alpha_乙}=2$. 因为甲、乙侧面展开图的圆心角之和为$2\pi$,所以$\alpha_甲=\dfrac{4\pi}{3}$,$\alpha_乙=\dfrac{2\pi}{3}$,所以甲、乙底面圆周长分别为$\dfrac{4}{3}\pi R$,$\dfrac{2}{3}\pi R$,所以$r_甲=\dfrac{2}{3}R$,$r_乙=\dfrac{1}{3}R$. 则$h_甲^2=R^2-r_甲^2=R^2-\dfrac{4}{9}R^2=\dfrac{5}{9}R^2$,$h_乙^2=R^2-r_乙^2=R^2-\dfrac{1}{9}R^2=\dfrac{8}{9}R^2$,所以$h_甲=\dfrac{\sqrt{5}}{3}R$,

$h_乙=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$. 根据圆锥的体积公式,可得 $V_甲=\dfrac{1}{3}h_甲\pi r_甲^2=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}R\times\dfrac{4}{9}R^2\pi=\dfrac{4\sqrt{5}}{81}R^3\pi$, $V_乙=\dfrac{1}{3}h_乙\pi r_乙^2=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R\times\dfrac{1}{9}R^2\pi=\dfrac{2\sqrt{2}}{81}R^3\pi$,所以 $\dfrac{V_甲}{V_乙}=\dfrac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{10}$,**故选 C.**

一题多解 由 $\dfrac{S_甲}{S_乙}=2$ 及甲、乙两个圆锥母线长相等,得侧面展开图的圆心角之比为 2. 设甲、乙两个圆锥的母线长 $l=3$,底面半径分别为 R_1,R_2,高分别为 h_1, h_2, 又由两个圆锥的侧面展开图恰好拼成周长为 6π 的圆,得 $2\pi R_1=4\pi$, $2\pi R_2=2\pi$,解得 $R_1=2$, $R_2=1$. 由勾股定理知 $h_1=\sqrt{l^2-R_1^2}=\sqrt{5}$, $h_2=\sqrt{l^2-R_2^2}=2\sqrt{2}$,所以 $\dfrac{V_甲}{V_乙}=\dfrac{\frac{1}{3}\pi R_1^2h_1}{\frac{1}{3}\pi R_2^2h_2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{10}$,**故选 C.**

7. B 【解析】因为几何体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱台, $AB=2A_1B_1=4$, $\angle A_1AB=60°$,侧面以及对角面为等腰梯形,故 $AA_1=\dfrac{\frac{1}{2}(AB-A_1B_1)}{\cos\angle A_1AB}=2$, $AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=2\sqrt{2}$, $A_1O_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}A_1B_1=\sqrt{2}$,所以 $OO_1=\sqrt{AA_1^2-(AO-A_1O_1)^2}=\sqrt{2}$,所以该正四棱台的体积 $V=\dfrac{1}{3}OO_1\cdot(S_{四边形ABCD}+S_{四边形A_1B_1C_1D_1}+\sqrt{S_{四边形ABCD}S_{四边形A_1B_1C_1D_1}})=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\times(16+4+8)=\dfrac{28\sqrt{2}}{3}$,**故 B 正确.**

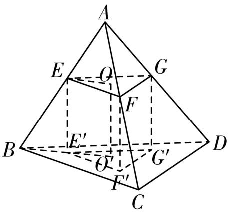
8. A 【解析】如图,在正方体 $ABCD-EFGH$ 中,若要使液面形状不为三角形,则平面 EGD 平行于水平面放置时,液面必须高于平面 EGD,且低于平面 AFC,若满足上述条件,则任意转动正方体,液面形状都不可能为三角形.



设水的体积为 V, 而 $V_{G-EHD}<V<$

$V_{正方体ABCD-EFGH}-V_{B-AFC}$，而 $V_{G-EHD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1^2\times 1=\frac{1}{6}$，$V_{正方体ABCD-EFGH}-V_{B-AFC}=1^3-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，所以 V 的取值范围是 $\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$. **故 A 正确.**

9. A 【解析】如图，设正三棱柱为 $EFG-E'F'G'$，其上、下底面的中心分别为 O，O'，由于 $\triangle BCD$ 为正三角形，故 O' 也为 $\triangle BCD$ 的中心，连接 OO'，OE，$O'B$，易知 B，E'，O' 三点共线.

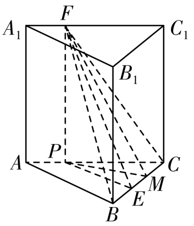


设正三棱柱底面正三角形边长为 x，$x\in(0,2)$，由题意可知 $\triangle AEG$ 为正三角形，故 $AE=EG=x$，所以 $BE=2-x$，又 $O'B=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$O'E'=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}x}{3}$，

故 $BE'=O'B-O'E'=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}x}{3}$，所以正三棱柱 $EFG-E'F'G'$ 的高 $h=\sqrt{BE^2-(BE')^2}=\sqrt{(2-x)^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}(2-x)$，故该正三棱柱的侧面积 $S=3\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times(2-x)x=\sqrt{6}(2-x)x=\sqrt{6}(-x^2+2x)$. 当 $x=1$ 时，$y=-x^2+2x$ 取到最大值 1，故 $S=\sqrt{6}(-x^2+2x)$ 的最大值为 $\sqrt{6}$，**故 A 正确.**

专题上分 8　空间角和距离的求解

1. A 【解析】如图所示，过点 F 作 $FP\perp AC$ 于点 P，过点 P 作 $PM\perp BC$ 于点 M，连接 PE，BF，FM，FC，易知 $FP\,/\!/\,AA_1$，因为 $AA_1\perp$ 底面 ABC，所以 $FP\perp$ 底面 ABC.



因为 $BC\subset$ 底面 ABC，所以 $FP\perp BC$，又 $PM\perp BC$，$FP\cap PM=P$，FP，$PM\subset$ 平面 FPM，所以 $BC\perp$ 平面 FPM. 又 $FM\subset$ 平面 FPM，所以 $BC\perp FM$. 则 $\alpha=\angle EFP$，$\beta=\angle FEP$，$\gamma=\angle FMP$，$\tan\alpha=\frac{PE}{FP}=\frac{PE}{AB}\leqslant 1$，

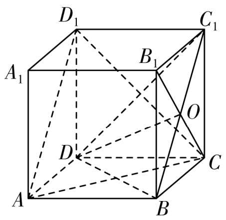
$\tan\beta=\dfrac{FP}{PE}=\dfrac{AB}{PE}\geqslant 1$, $\tan\gamma=\dfrac{FP}{PM}\geqslant\dfrac{FP}{PE}=\tan\beta$,所以 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$,故 A 正确.

2. ABD 【解析】连接 B_1C 交 BC_1 于点 O,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$B_1C\perp BC_1$,即 $CO\perp BC_1$,又 $AB\perp$ 平面 BB_1C_1C,$CO\subset$ 平面 BB_1C_1C,所以 $AB\perp CO$,又 $AB\cap BC_1=B$,$AB,BC_1\subset$ 平面 ABC_1D_1,所以 $CO\perp$ 平面 ABC_1D_1,则 $\angle CBO$ 就是直线 BC 与平面 ABC_1D_1 所成的角,$\sin\angle CBO=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,故 A 正确;

易知 $BC_1//AD_1$,所以 $\angle AD_1C$ 就是异面直线 D_1C 和 BC_1 所成角(或其补角),又 $AD_1=D_1C=AC=\sqrt{2}$,所以 $\angle AD_1C=\dfrac{\pi}{3}$,故 B 正确;

因为 $CO\perp$ 平面 ABC_1D_1,所以 $V_{C-ABC_1D_1}=\dfrac{1}{3}\times 1\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{3}$,故 C 错误;

连接 DO,因为 $DB=DC_1=\sqrt{2}$,且点 O 为 BC_1 中点,所以 $DO\perp BC_1$,又 $CO\perp BC_1$,所以 $\angle COD$ 就是二面角 $C-BC_1-D$ 的平面角,又 $DO=\sqrt{2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,所以 $\cos\angle COD=\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1}{2\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,故 D 正确. 故选 ABD.



3. $\sqrt{6}$　$\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$

思路导引 利用二面角的定义找到 $\angle B'ED$ 为二面角 $B'-AC-D$ 的平面角,当二面角 $B'-AC-D$ 为直二面角时,易得到 $B'D=\sqrt{B'E^2+ED^2}=\sqrt{6}$;当三棱锥 $B'-ACD$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时,求出 B' 到平面 ACD 的距离 $d=B'O=\dfrac{3}{2}$,再结合三角函数计算即可.

【解析】如图,将菱形 $ABCD$ 沿 AC 将

$\triangle ABC$ 折起得到二面角 $B'-AC-D$，

取 AC 的中点 E，连接 $B'E,ED,B'D$，

因为菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle A=\frac{2\pi}{3}$，所以 $AB'=B'C=AC=AD=CD=2$，所以 $B'E\perp AC,ED\perp AC$，且 $B'E=ED=\sqrt{3}$，

所以 $\angle B'ED$ 为二面角 $B'-AC-D$ 的平面角，当二面角 $B'-AC-D$ 为直二面角时，$\angle B'ED=\frac{\pi}{2}$，

所以 $B'D=\sqrt{B'E^2+ED^2}=\sqrt{3+3}=\sqrt{6}$.

当三棱锥 $B'-ACD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，记 B' 到平面 ACD 的距离为 d，

则 $V_{B'-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}\times d=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $d=\frac{3}{2}$.

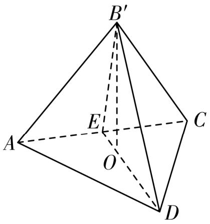
过点 B' 作 $B'O\perp ED$ 于点 O，因为 $B'E\perp AC,ED\perp AC$，且 $B'E\cap ED=E$，$B'E,ED\subset$ 平面 $B'ED$，所以 $AC\perp$ 平面 $B'ED$，

因为 $B'O\subset$ 平面 $B'ED$，所以 $AC\perp B'O$，又因为 $AC\cap ED=E$，$AC,ED\subset$ 平面 ACD，所以 $B'O\perp$ 平面 ACD，故 B' 到平面 ACD 的距离 $d=B'O=\frac{3}{2}$，

因为 $B'O\perp ED$，所以 $\triangle B'OE$ 为直角三角形，因为 $B'E=\sqrt{3}$，所以 $\sin\angle B'ED=\frac{B'O}{B'E}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\angle B'ED$ 为二面角 $B'-AC-D$ 的平面角，所以 $\angle B'ED\in[0,\pi]$，

所以 $\angle B'ED=\frac{\pi}{3}$ 或 $\angle B'ED=\frac{2\pi}{3}$.



4.【解】(1) 连接 MN,C_1A,C_1M. 由 M,N 分别是棱 BC,BA 的中点，

根据三角形中位线定理，得 $MN/\!/AC$，且 $MN=\frac{AC}{2}=1$，

在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，可得 $A_1C_1/\!/AC$，所以 $MN/\!/A_1C_1$，

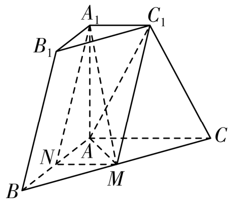
由 $MN=A_1C_1=1$，可得四边形 MNA_1C_1 是

平行四边形，则 $A_1N//MC_1$，

所以 $\angle CC_1M$ 为 A_1N 与 CC_1 所成角，

在 $\triangle CC_1M$ 中，可知 $CC_1=\sqrt{5}$，$C_1M=A_1N=\sqrt{5}$，$CM=\sqrt{2}$，

则 $\cos\angle CC_1M=\dfrac{5+5-2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$.



(2)因为 $A_1A\perp$ 平面 ABC，AM，$AC\subset$ 平面 ABC，所以 $A_1A\perp AM$，$A_1A\perp AC$，

又 AM，AC 分别在平面 A_1MA 与平面 ACC_1A_1 内，平面 $A_1MA\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AA_1$，所以 $\angle CAM$ 即为二面角 $M-AA_1-C$ 的平面角，

又 $AB\perp AC$，$AB=AC$，M 是棱 BC 的中点，

所以 $\angle CAM=\dfrac{\pi}{4}$，$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

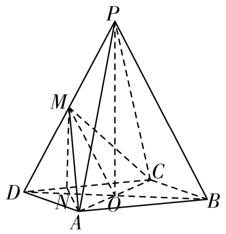
所以二面角 $M-AA_1-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. (1)【证明】如图，连接 OM，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\because$ O 为 AC 与 BD 的交点，$\therefore$ O 为 BD 的中点，又 M 为 PD 的中点，$\therefore$ $PB//MO$. 又 $PB\not\subset$ 平面 ACM，$MO\subset$ 平面 ACM，$\therefore$ $PB//$ 平面 ACM.

(2)【证明】$\because$ $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ $BC\perp PO$. 在 $\triangle ADC$ 中，$\because$ $AD=AC$，$\angle ADC=45^\circ$，$\therefore$ $AD\perp AC$，又 $AD//BC$，$\therefore$ $BC\perp AC$. $\because$ $PO\cap AC=O$，$PO\subset$ 平面 PAC，$AC\subset$ 平面 PAC，$\therefore$ $BC\perp$ 平面 PAC，又 $BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 PAC.

(3)【解】如图，取 DO 的中点 N，连接 MN，AN. $\because$ M 为 PD 的中点，$\therefore$ $MN//PO$，且 $MN=\dfrac{1}{2}PO=1$. 由 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，得 $MN\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ $\angle MAN$ 是直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成的角. 由(2)可知，$\angle CAD=90^\circ$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DAO$ 中，$AD=2$，$AO=\dfrac{1}{2}AC=1$，$\therefore$ $DO=\sqrt{5}$，从而 $AN=\dfrac{1}{2}DO=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. $\because$ $AN\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ $MN\perp AN$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ANM$ 中，$\tan\angle MAN=\dfrac{MN}{AN}=$

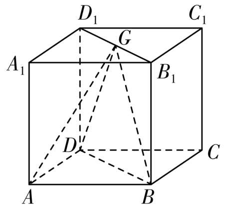
$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，∴ 直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



6. B

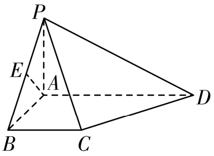
攻略上分 本题为求点到平面的距离，利用通法攻略 52 中的转化法，借助几何体的体积即可求解.

【解析】连接 BD，BG，如图，由题意得 $V_{G-ABD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABD}\cdot BB_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$.



设点 B 到平面 GAD 的距离为 h，则由等体积转化法得 $V_{B-ADG}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ADG}\cdot h=V_{G-ABD}=\frac{4}{3}$，当 G 与 B_1 重合时，$S_{\triangle ADG}$ 最大，最大值为$\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，此时 h 最小，为$\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. **故 B 正确.**

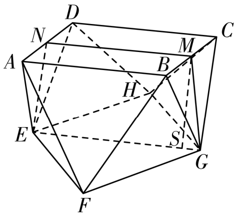
7. C 【解析】如图，在平面 PAB 中过点 A 作 $AE\perp PB$，垂足为点 E.



因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle PBA$ 为 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角，则 $\angle PBA=\frac{\pi}{4}$. 又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$，又 $PA=1$，所以 $AB=1$，$PB=\sqrt{2}$，$AE=\frac{1}{2}PB=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，所以 $BC\perp AB$. 因为

$BC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BC$. 又 $AB\cap PA=A$,AB,$PA\subset$平面 PAB,所以 $BC\perp$平面 PAB. 因为 $AE\subset$平面 PAB,所以 $BC\perp AE$. 又 $AE\perp PB$,$BC\cap PB=B$,BC,$PB\subset$平面 PBC,所以 $AE\perp$平面 PBC. 所以点 A 到平面 PBC 的距离为 $AE=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **故 C 正确.**

8. B 【解析】如图,分别取 BC,AD 的中点 M,N,连接 MN,MG,NE,EG,



易知四边形 $EGMN$ 为等腰梯形,

根据题意可知 $BC\perp MN$,$BC\perp MG$,

而 $MN\cap MG=M$,MN,$MG\subset$平面 $EGMN$,

故 $BC\perp$平面 $EGMN$,又 $BC\subset$平面 $ABCD$,

故平面 $ABCD\perp$平面 $EGMN$,则平面 $EFGH\perp$平面 $EGMN$,

作 $MS\perp EG$,垂足为 S,平面 $EFGH\cap$平面 $EGMN=EG$,

$MS\subset$平面 $EGMN$,故 $MS\perp$平面 $EFGH$,

则梯形 $EGMN$ 的高即为平面 $ABCD$ 与平面 $EFGH$ 之间的距离.

易知 $MG=\sqrt{3}$,$SG=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$,

故 $MS=\sqrt{MG^2-SG^2}=\sqrt{3-(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{8}$,即平面 $ABCD$ 与平面 $EFGH$ 之间的距离为$\sqrt[4]{8}$,**故选 B.**

9. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】由题知,$A_1B_1\parallel EF$,且 $A_1B_1\not\subset$平面 D_1EF,$EF\subset$平面 D_1EF,所以 $A_1B_1\parallel$平面 D_1EF,则 A_1B_1 到平面 D_1EF 的距离为 A_1 到平面 D_1EF 的距离.

显然 $EF\perp$平面 D_1A_1E,连接 A_1F(图略),对于三棱锥 A_1-D_1EF,有 $V_{A_1-D_1EF}=V_{F-D_1A_1E}$,设 A_1 到平面 D_1EF 的距离为 h,由题意得 $A_1E=\frac{1}{2}$,$EF=1$,$D_1A_1=1$,在 $\mathrm{Rt}\triangle D_1EF$ 中,得 $D_1E=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 由 $\frac{1}{3}\times EF\times S_{\triangle D_1A_1E}=\frac{1}{3}\times h\times S_{\triangle D_1EF}$,得 $\frac{1}{3}\times EF\times\frac{1}{2}\times D_1A_1\times A_1E=\frac{1}{3}h\times\frac{1}{2}\times EF\times D_1E$,即$\frac{1}{3}\times 1\times$

$\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}h\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{5}}{2}$，解得 $h=\frac{\sqrt{5}}{5}$，即 A_1B_1 到平面 D_1EF 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

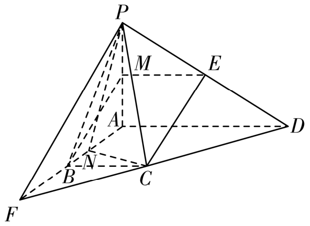
10. **思路导引** (1)取 PA 的中点 M，连接 BM,EM，证明 $CE//BM$，再由线面平行的判定定理即可证得 $CE//$平面 PAB.(2)由(1)所得结论，利用线面平行的性质定理可得 $CE//PF$，由题意可知 $PA\perp$平面 $ABCD$，从而 $PA\perp AB$，利用中点结合平面几何知识可求得 $BM=\frac{\sqrt{7}}{2}$，进而求得 PF 的长度.(3)过点 C 作 AB 的垂线，垂足为 N，连接 PN，由题意，$\angle CPN$ 为 PC 与平面 PAB 所成角. 由 $\tan\angle CPN=\frac{CN}{PN}$得 $CN=\frac{\sqrt{3}}{3}PN\geq1$，又 $CE//$平面 PAB，所以直线 CE 到平面 PAB 的距离等于点 C 到平面 PAB 的距离，进而得直线 CE 到平面 PAB 的距离的最小值.

(1)【证明】如图，取 PA 的中点 M，连接 BM,EM.

因为 E 为 PD 的中点，所以 $EM//AD$，且 $EM=\frac{1}{2}AD$.

根据题意可知 $BC//AD$，且 $BC=\frac{1}{2}AD$，

从而可得 $BC//EM$，且 $BC=EM$，



即可得四边形 $BCEM$ 为平行四边形，

即可得 $CE//BM$，又 $BM\subset$平面 PAB，$CE\not\subset$平面 PAB，所以 $CE//$平面 PAB.

(2)【解】由(1)可知 $CE//$平面 PAB，$CE\subset$平面 PDC，平面 $PAB\cap$平面 $PCD=l$，

所以 $CE//l$，如图所示，因为 l 交平面 $ABCD$ 于点 F，所以直线 l 与直线 PF 重合，即可得 $CE//PF$.

连接 CF,BF，在△PDF 中，点 E 是 PD 的中点，所以 $PF=2CE$.

结合(1)可知 $PF=2BM$.

又点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\sqrt{3}$，且 $PA=\sqrt{3}$，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$.

在 $\triangle ABM$ 中，$\angle MAB=\frac{\pi}{2}$，$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AB=1$，根据勾股定理可得 $BM=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

从而可得 $PF=\sqrt{7}$.

(3)【解】过点 C 作 AB 的垂线，垂足为 N，连接 PN.

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$CN\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $CN\perp$ 平面 PAB，

所以 $\angle CPN$ 为 PC 与平面 PAB 所成角.

由题意可得 $\angle CPN=\frac{\pi}{6}$，

在 $\triangle CPN$ 中，$\angle CNP=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{CN}{PN}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

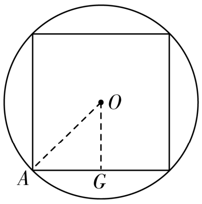
从而可得 $CN=\frac{\sqrt{3}}{3}PN$.

又点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\sqrt{3}$，所以 $PN\geqslant\sqrt{3}$，从而可得 CN 的最小值为 1，即点 C 到平面 PAB 的距离的最小值为 1.

由(1)可知 $CE//$平面 PAB，所以直线 CE 到平面 PAB 的距离等于点 C 到平面 PAB 的距离，故直线 CE 到平面 PAB 的距离的最小值为 1.

专题上分 9　球的切、接问题

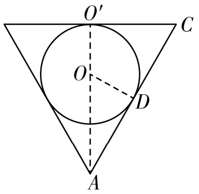
1. A　【解析】如图为圆柱与其外接球的轴截面，O 为球心，连接 OA，作 $OG\perp AG$，设圆柱的高为 h，底面半径为 r，则 $OG=\frac{h}{2}$，$GA=r$，由题知 $OA=2\sqrt{3}$，则$\frac{h^2}{4}+r^2=12$. 圆柱的体积 $V=\pi r^2\cdot h=\pi\sqrt{r^2\cdot r^2\cdot h^2}=\pi\sqrt{2\left(r^2\cdot r^2\cdot\frac{h^2}{2}\right)}\leqslant\pi\sqrt{2\left(\frac{r^2+r^2+\frac{h^2}{2}}{3}\right)^3}=\pi\cdot\sqrt{2\times8^3}=32\pi$，当且仅当 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}h$，即 $r=2\sqrt{2}$，$h=4$ 时等号成立. **故 A 正确.**



2. $\frac{256}{3}\pi$　$\sqrt{3}+2$　【解析】连接 BC，AB，AC（图略），则 $\triangle ABC$ 为等边三角形，设圆柱底面半径为 R，高为 h，小球的半径为 r，则 $h=4r$，$2R=\sqrt{3}r+2r$，故 $R=\frac{\sqrt{3}r+2r}{2}=4+2\sqrt{3}$，解得 $r=4$，故 $h=16$，则球 A 的体积为 $\frac{4\pi\times4^3}{3}=\frac{256\pi}{3}$，圆柱的侧面积为 $2\pi Rh=2\pi(2\sqrt{3}+4)\times16=32\pi(2\sqrt{3}+4)$，球 B 的表面积为 $4\pi\times16=64\pi$，故圆柱的侧面积与球 B 的表面积的比值为 $\frac{32\pi(2\sqrt{3}+4)}{64\pi}=\sqrt{3}+2$.

3. A　【解析】由题意可得，圆锥的底面圆周长为 $2\pi\times2=4\pi$，则母线长 $l=\frac{4\pi}{\frac{2\pi}{3}}=6$，高 $h=\sqrt{l^2-2^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$，由圆锥的顶点和底面圆周都在球 O 的球面上，可知 O 在圆锥的高所在的直线上. 设球 O 的半径为 R，则有 $(h-R)^2+2^2=R^2$，解得 $R=\frac{9\sqrt{2}}{4}$，则球 O 的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^3=\frac{243\sqrt{2}\pi}{8}$. **故 A 正确.**

4. C　【解析】由题可知，该容器为圆锥，冰球内切于该容器，如图，作出容器与冰球的轴截面，设冰球球心为 O，容器底面圆圆心为 O'，过点 O 作 $OD\perp AC$，垂足为 D，连接 AO'.



由题知，冰球的半径 $r=OD=6$ cm，$\angle OAD=30°$，则 $OA=2r=12$ cm，$OO'=r=6$ cm，$AO'=18$ cm，容器底面半径 $R=O'C=18\times\tan30°=6\sqrt{3}$(cm).

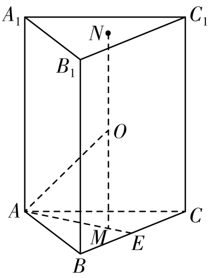
则原来该容器内饮料的体积为 $\frac{1}{3}\pi\times$

$(6\sqrt{3})^2\times18-\frac{4}{3}\pi\times6^3=360\pi(cm^3)$. **故 C 正确.**

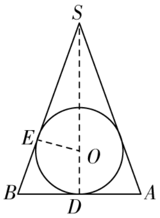
5. B 【解析】设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，则其内切球的直径为 a，由题意得 $4\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=16\pi$，解得 $a=4$，即正方体的棱长为 4. 半径为 1 的两个球的直径和为 4，故正方体内最多可以放 8 个半径为 1 的球. **故 B 正确.**

6. B 【解析】依题意，正三棱柱上底面外接圆半径 $r=\frac{2}{3}\times6\times\sin\ 60°=2\sqrt{3}$，球心到正三棱柱的上底面的距离 $d=6$，因此半球体的半径 $R=\sqrt{r^2+d^2}=4\sqrt{3}$，所以半球体的体积为 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi\cdot(4\sqrt{3})^3=128\sqrt{3}\pi$. **故 B 正确.**

7. D 【解析】由题可知，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱柱. 如图，设 N,M 分别是正三棱柱上、下底面中心，连接 MN，则 MN 是棱柱的高，MN 的中点 O 是该三棱柱外接球的球心，设 BC 的中点为 E，连接 AE,AO. 由 $\triangle ABC$ 为正三角形，可知 $AM=\frac{2}{3}AE=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=2$，则三棱柱外接球半径 $R=\sqrt{AM^2+OM^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$，从而外接球体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times27=36\pi$. **故 D 正确.**

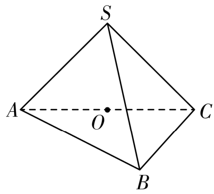


8. $12\sqrt{3}$ 【解析】圆锥与球 O 的轴截面如图所示，S 为圆锥的顶点，AB 为圆锥的底面直径，D,E 为切点，连接 OE,SD，则 $OE\perp SB,SD\perp AB$，且 SD 过点 O，设球 O 的半径为 r，由题意可得 $\triangle SDB\backsim\triangle SEO$，故 $\frac{SD}{SE}=\frac{BD}{EO}$，即 $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{(8\sqrt{2}-r)^2-r^2}}=\frac{4}{r}$，整理得 $r^2+2\sqrt{2}r-16=0$，解得 $r=2\sqrt{2}$（负值舍去）.



设正三棱柱的底面边长为 a,正三棱柱的高为 h,则 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=r^2=8$,即 $\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{4}h^2=8$,正三棱柱的侧面积 $S_{侧}=3ah=6\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)\cdot\left(\frac{1}{2}h\right)\leqslant 6\sqrt{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{4}h^2}{2}=24\sqrt{3}$,当且仅当 $\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{1}{2}h$,且 $\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{4}h^2=8$,即 $a=2\sqrt{3}$,$h=4$ 时取等号,此时该正三棱柱的侧面积最大,故此时正三棱柱的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h=12\sqrt{3}$.

9. A 【解析】由题意知 $SA=SC=AB=BC=\sqrt{2}$,$AC=2$,所以 $\angle ASC=\angle ABC=90°$,故四面体 $S\text{-}ABC$ 的外接球球心即为 AC 的中点 O,所以外接球的半径为 1,外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi\times1^3=\frac{4}{3}\pi$,外接球的表面积为 $4\pi\times1^2=4\pi$. **故 A 正确.**



10. C 【解析】因为四边形 $ABCD$ 为菱形,$\angle ABC=60°$,所以 $\triangle ABC$ 是正三角形,则 $OA=1$,$OB=\sqrt{3}$.

由题知,$PO\perp AC$,$PO\perp BD$. 设 $PO=a$,则 $PA=\sqrt{a^2+1}$,$PB=\sqrt{a^2+3}$.

在 $\triangle PAB$ 中,由余弦定理可得 $a^2+1=(a^2+3)+4-2\times2\sqrt{a^2+3}\cos 60°$,解得 $a=\sqrt{6}$,所以 $PO=\sqrt{6}$,$PA=\sqrt{7}$,$PB=3$.

因为 O 为 BD 的中点,所以 $PB=PD$. 又 $BC=CD$,$PC=PC$,所以 $\triangle PCB\cong\triangle PCD$.

同理可证 $\triangle PCD\cong\triangle PAD$,$\triangle PAD\cong\triangle PAB$,所以 $S_{\triangle PCB}=S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PAB}$.

设四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的内切球的半径为 r,则 $V_{四棱锥P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}S_{菱形ABCD}\cdot PO=$

$\frac{1}{3}(S_{菱形ABCD}+S_{\triangle PCB}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PAB})r$，

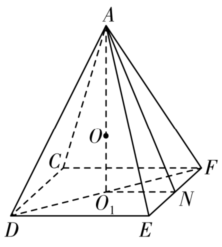
所以 $r=\frac{S_{菱形ABCD}\cdot PO}{S_{菱形ABCD}+4S_{\triangle PAB}}=\frac{2\times2\sin 60°\times\sqrt{6}}{2\times2\sin 60°+4\times\left(\frac{1}{2}\times2\times3\sin 60°\right)}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球的表面积 $S=4\pi r^2=\frac{3\pi}{2}$，**故 C 正确.**

归纳总结 一个棱锥的内切球半径 r 可以根据球心到各个面的距离相等以及棱锥的体积公式 $\left(V=\frac{1}{3}S_{棱锥表面积}\cdot r\right)$ 求得.

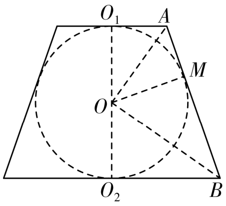
11. D 【解析】设球的半径为 R，球心为 O，四棱锥 $A-CDEF$ 的高为 h，由题可知 $\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{500\pi}{3}$，解得 $R=5$. $V_{四棱锥A-CDEF}=\frac{1}{3}\times S_{正方形CDEF}\times h=\frac{32}{3}h$，所以要使四棱锥 $A-CDEF$ 的体积最大，只需使点 A 到底面 $CDEF$ 的距离最大. 根据四棱锥的结构特征可知，当四棱锥 $A-CDEF$ 为正四棱锥且球心 O 在四棱锥的内部时，该四棱锥的高最大，体积也最大.

设 N 是线段 EF 的中点，O_1 是正方形 $CDEF$ 的中心，连接 AO_1，O_1N，AN，DF. 设正方形 $CDEF$ 的边长为 a，则 $a^2=32$，解得 $a=4\sqrt{2}$，所以正方形 $CDEF$ 的外接圆半径 $r=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}=4$，$NO_1=2\sqrt{2}$，球心 O 到底面 $CDEF$ 的距离 $OO_1=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$. 当四棱锥的体积最大时，四棱锥 $A-CDEF$ 为正四棱锥，四棱锥 $A-CDEF$ 的高 $AO_1=R+OO_1=5+3=8$，因为 $AO_1\perp O_1N$，所以 $AN=\sqrt{AO_1^2+NO_1^2}=\sqrt{8^2+(2\sqrt{2})^2}=6\sqrt{2}$，此时该四棱锥的表面积为 $4\times\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times6\sqrt{2}+32=128$，**故 D 正确.**



12. C　【解析】设球心为 O，球 O 的半径为 R，棱台的高为 h，则 $h=\sqrt{6}$，$4\pi R^2=32\pi$，所以 $R=2\sqrt{2}$. 由题知，O 在底面 $ABCD$ 上，底面 $ABCD$ 为正方形，易得正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}R=4$，面积为 16. 设底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的外接圆半径为 r，则 $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{2}$，易得正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 $\sqrt{2}r=2$，面积为 4，所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times(16+4+\sqrt{16\times4})\times\sqrt{6}=\frac{28\sqrt{6}}{3}$. 故 C 正确.

13. 32π　【解析】连接 OA，OB，如图所示.



根据题意可知，$O_1A=AM=2$，$O_2B=BM=4$，

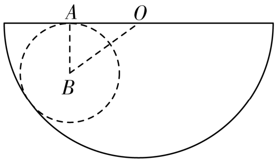
所以 $\angle O_1OA=\angle AOM$，$\angle O_2OB=\angle BOM$，

因为 $\angle O_1OA+\angle AOM+\angle O_2OB+\angle BOM=\pi$，所以 $\angle AOM+\angle BOM=\frac{\pi}{2}$.

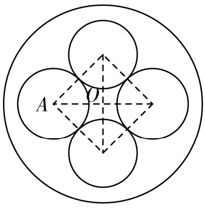
因为 $OM\perp AB$，所以 $\triangle OMA\backsim\triangle BMO$.

所以 $\frac{OM}{AM}=\frac{BM}{OM}$，所以 $OM=\sqrt{AM\cdot BM}=2\sqrt{2}$，所以圆台的内切球半径为 $2\sqrt{2}$，所以圆台的内切球的表面积 $S=4\pi\times OM^2=32\pi$.

14. B　【解析】作出其中一个小球和容器的正视图，如图①所示，作出四个小球和容器的俯视图，如图②所示.



图①

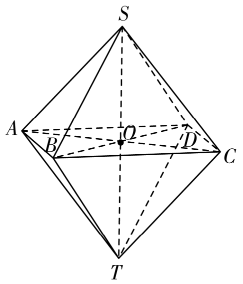


图②

图①中小球球心 B，半球球心 O 与切点 A 构成直角三角形，则有 $OA^2+AB^2=$

OB^2,图②中,四个小球球心的连线围成边长为 2 cm 的正方形. 设半球半径为 R,已知小球半径 $r=1$ cm,所以 $OA=\sqrt{2}$ cm,$AB=1$ cm,$OB=\sqrt{3}$ cm,$R=OB+r=\sqrt{3}+1$(cm). 所以半球形状的容器的容积是 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times(\sqrt{3}+1)^3\pi=\frac{4(5+3\sqrt{3})\pi}{3}$($cm^3$). **故 B 正确.**

15. BCD 【解析】对于 A,如图所示,由对称性可知棱切球球心 O 就是正八面体的中心,连接 ST,AC,BD 交于点 O,因为 $TA=TB=TC=TD=2$,所以 T 在平面 $ABCD$ 上的投影就是正方形 $ABCD$ 的中心,所以 $OT\perp$ 平面 $ABCD$,又 $OC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $OC\perp OT$,又因为 $BO=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$,所以 $OA=OB=OC=OD=OS=OT=\sqrt{2}$.



设点 O 到平面 CDT 的距离为 r,则有

$\frac{1}{3}OT\cdot\frac{1}{2}OC\cdot OD=V_{O-CDT}=\frac{1}{3}r\cdot S_{\triangle CDT}=\frac{1}{3}r\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\frac{\sqrt{3}}{3}r$,

故 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}$,**故 A 错误.**

对于 B,因为 $OC=OT=\sqrt{2}$,所以点 O 到直线 CT 的距离 $h=\frac{2S_{\triangle OCT}}{CT}=\frac{OC\cdot OT}{CT}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=1$,**故 B 正确.**

对于 C,根据上面的分析,球 O 的半径 R 等于点 O 到直线 CT 的距离,即 $R=1$.

从而平面 CDT 截棱切球所得圆的半径 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,设这个圆为圆 P,球 O 的体积为 V,以 O 为顶点,圆 P 为底面的圆锥的体积为 V_1,

则棱切球在正八面体内部的体积大于 $8V_1$.

所以球 O 在正八面体外部的体积小于

$V-8V_1=\frac{4}{3}\pi R^3-8\times\frac{1}{3}\pi d^2 r=\frac{4}{3}\pi-8\times\frac{\sqrt{6}}{27}\pi=\left(\frac{4}{3}-\frac{8\sqrt{6}}{27}\right)\pi$，故 C 正确.

对于 D，球 O 在正八面体外部的表面积等于正八面体外八个球冠的表面积.

对于一个球冠而言，由其顶点和底面可以确定一个圆锥，且该圆锥的侧面积一定小于球冠的表面积，

即每个球冠的表面积都大于由该球冠顶点和底面圆确定的圆锥的侧面积.

由题可知由一个球冠确定的圆锥的底面半径 $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$，高 $H=R-r=1-\frac{\sqrt{6}}{3}$，故母线长 $l=\sqrt{d^2+H^2}=\sqrt{2-\frac{2\sqrt{6}}{3}}$.

所以每个球冠的表面积都大于该圆锥的侧面积 $\pi dl=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{2-\frac{2\sqrt{6}}{3}}\pi=\frac{1}{3}\sqrt{6-2\sqrt{6}}\pi$.

所以八个球冠的表面积之和大于 $\frac{8}{3}\sqrt{6-2\sqrt{6}}\pi$，故 D 正确. 故选 BCD.

16. $4\sqrt{3}\pi$　7π　【解析】如图，设圆柱的底面半径为 r，高为 h，圆锥的高为 t，陀螺的外接球的半径为 R.

由题意可知，$4\pi R^2=16\pi$，$h=2$，

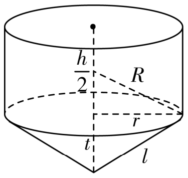
$\therefore R=2$，$\therefore r=\sqrt{R^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 圆柱的侧面积 $S=2\pi r\times h=4\sqrt{3}\pi$.

圆柱的体积 $V_1=\pi r^2\times h=6\pi$，

圆锥的高 $t=R-\frac{h}{2}=2-1=1$，则圆锥的体积 $V_2=\frac{1}{3}\pi r^2\times t=\pi$，

$\therefore$ 该陀螺的体积 $V=V_1+V_2=7\pi$.

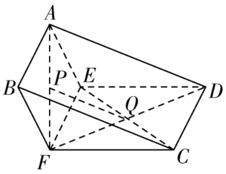


专题上分 10　翻折问题

1. C

攻略上分　利用大招攻略 53，把握好翻折前后变与不变的关系，再利用相关定理、性质求解即可.

【解析】翻折之后如图所示，



A：因为 $AD=3AE$，$BC=3BF$，所以 $AB//EF$ 且 $EF//CD$，因此 $AB//CD$，**故 A 成立**；

B：连接 FD，因为 P，Q 分别为 FA，FD 的中点，所以 $PQ//AD$，又因为 $EF\perp AE$，$EF\perp DE$，$AE\cap DE=E$，AE，$DE\subset$ 平面 AED，则 $EF\perp$ 平面 AED，因为 $AB//EF$，所以 $AB\perp$ 平面 AED，又 $AD\subset$ 平面 AED，所以 $AB\perp AD$，所以 $AB\perp PQ$，**故 B 成立**；

C：因为 $PQ//AD$，$ED\cap AD=D$，所以 PQ 与 ED 不平行，**故 C 不成立**；

D：因为 $PQ//AD$，且 $PQ\not\subset$ 平面 ADE，$AD\subset$ 平面 ADE，所以 $PQ//$ 平面 ADE，**故 D 成立**.

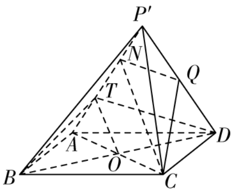
方法总结 解决平面图形在翻折过程中位置关系的判断问题时，要注意翻折前后的线段长度与位置关系的“变”与“不变”. 与折痕垂直的线段，翻折前后垂直关系不变；与折痕平行的线段，翻折前后平行关系不变.

2. (1)【证明】因为 $\triangle P'AD$ 是正三角形，所以 $P'A=AB=2$，在 $\triangle P'AB$ 中，$P'A^2+AB^2=8=P'B^2$，则 $AB\perp P'A$.

在正方形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$P'A\cap AD=A$，$P'A$，$AD\subset$ 平面 $P'AD$，于是 $AB\perp$ 平面 $P'AD$，而 $CD//AB$，所以 $CD\perp$ 平面 $P'AD$.

(2)【解】存在点 Q 使得 $CQ//$ 平面 BDT，且点 Q 为线段 $P'D$ 的中点. 证明如下：

分别取 $P'T$，$P'D$ 的中点 N，Q，连接 CQ，NQ，CN，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OT，如图.



易知 $NQ//TD$，又 $TD\subset$ 平面 BDT，$NQ\not\subset$ 平面 BDT，所以 $NQ//$ 平面 BDT.

依题意，T 为 $P'A$ 上一点，且满足 $P'T=$

$2AT$，则 T 为 NA 中点，又 O 为 AC 中点，即有 $TO//CN$.

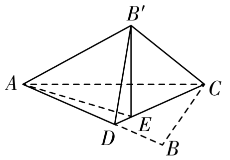
又 $TO\subset$ 平面 BDT，$CN\not\subset$ 平面 BDT，所以 $CN//$平面 BDT.

又 $CN\cap NQ=N$，CN，$NQ\subset$ 平面 CQN，从而平面 $CQN//$平面 BDT.

又 $CQ\subset$ 平面 CQN，所以 $CQ//$平面 BDT.

所以点 Q 为线段 $P'D$ 的中点时，$CQ//$平面 BDT.

3. B 【解析】过点 B' 作 $B'E\perp CD$ 于点 E，连接 AE，AB'，如图所示.



设 $\angle BCD=\angle B'CD=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $B'E=4\sin\alpha$，$CE=4\cos\alpha$，$\angle ACE=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$.

在 $\triangle AEC$ 中，由余弦定理得 $AE^2=AC^2+CE^2-2AC\cdot CE\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=9+16\cos^2\alpha-24\cos\alpha\sin\alpha$.

$\because$ 平面 $B'CD\perp$ 平面 ACD，平面 $B'CD\cap$ 平面 $ACD=CD$，$B'E\perp CD$，$B'E\subset$ 平面 $B'CD$，$\therefore B'E\perp$ 平面 ACD.

又 $AE\subset$ 平面 ACD，$\therefore B'E\perp AE$.

在 Rt $\triangle AEB'$ 中，由勾股定理得 $AB'^2=AE^2+B'E^2=9+16\cos^2\alpha-24\cos\alpha\sin\alpha+16\sin^2\alpha=25-12\sin2\alpha$，$\therefore$ 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时，AB' 取得最小值，为 $\sqrt{13}$. **故 B 正确.**

名师点拨 对于翻折问题中与线段长度有关的计算，通常需要将这个线段放在某个三角形中进行处理，如果是有关长度最值的计算，一般考虑转化为函数或者利用数形结合思想解决.

4. B 【解析】作出示意图如图所示，设点 D 在底面 ABC 的射影为 M，且 $M\in AB$，

所以 $DM\perp$ 平面 ABC，又 $AC\subset$ 平面 ABC，所以 $DM\perp AC$.

过点 D 作 $DN\perp AC$ 于点 N，连接 NM，又 $DM\cap DN=D$，DM，$DN\subset$ 平面 DNM，

所以 $AC\perp$ 平面 DNM，又 $NM\subset$ 平面

DNM，所以 $AC\perp NM$，

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{5}$，又

$\frac{1}{2}AC\times ND=\frac{1}{2}AD\times DC$，

所以$\sqrt{5}\times ND=1\times 2$，所以 $ND=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以

$AN=\sqrt{AD^2-ND^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

又 $NM=AN\tan\angle NAM=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{10}$，

在 Rt $\triangle ANM$ 中，可得 $AM=\sqrt{AN^2+NM^2}=\frac{1}{2}$，

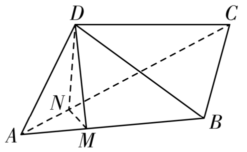
在 Rt$\triangle ADM$ 中，$DM=\sqrt{AD^2-AM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

设点 B 到平面 ACD 的距离为 d，

由 $V_{B-ACD}=V_{D-ACB}$ 可得 $\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot DM$，

所以$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **故选** B.



5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **【解析】**当 D'到平面 ABC 的距离最大，即 $D'O\perp$ 平面 ABC 时，三棱锥 $D'-ABC$ 的高最大，

由题意得，$\triangle ABD$ 为等边三角形，O 为 BD 中点，所以 $D'O=DO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AB=1$，

所以三棱锥 $D'-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}D'O\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{1}{2}\times 2^2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. (1)**【证明】**如图，取 AE 的中点 O，连接 PO，BO. 在直角梯形 $ABCD$ 中，

$\because DE=2$，$CD=3$，$\therefore CE=1$.

又$\because AB\perp BC$，$BC=\sqrt{3}$，$AB/\!/CD$，$\therefore BE=\sqrt{CE^2+BC^2}=2$.

$\because DE/\!/AB, DE=AB=2, \therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形.

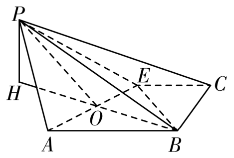
又$\because AB=BE=2, \therefore$ 四边形 $ABED$ 为菱形.

在四棱锥 $P-ABCE$ 中,连接 BE,由 $PA=PE=BA=BE=2$,得 $PO\perp AE, BO\perp AE$,

又$\because PO\cap BO=O, PO, BO\subset$ 平面 PBO,

$\therefore AE\perp$ 平面 PBO.

$\because PB\subset$ 平面 $PBO, \therefore PB\perp AE$.



(2)【解】过点 P 作 OB 的垂线,交 BO 的延长线于点 H,如图.

$\because AE\perp$ 平面 $PBO, AE\subset$ 平面 $ABE, \therefore$ 平面 $ABE\perp$ 平面 PBO.

$\because$ 平面 $ABE\cap$ 平面 $PBO=BO, PH\perp OB, PH\subset$ 平面 $PBO, \therefore PH\perp$ 平面 ABE.

由(1)知在直角梯形 $ABCD$ 中,四边形 $ABED$ 是边长为 2 的菱形,则 $AD=2$.

$\because$ 在直角梯形 $ABCD$ 中, $BC=\sqrt{3}, CE=1$,

$\therefore \angle BEC=\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$,则 $\triangle ABE$ 和 $\triangle PAE$ 都是正三角形,且 $OP=OB=\sqrt{3}$.

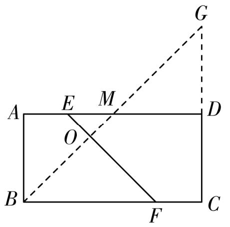
$\because PB=3, \therefore$ 在 $\triangle POB$ 中, $\cos\angle POB=\dfrac{OP^2+OB^2-PB^2}{2OP\cdot OB}=\dfrac{3+3-9}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$.

$\because 0<\angle POB<\pi, \therefore \angle POB=\dfrac{2\pi}{3}$.则在 $\mathrm{Rt}\triangle PHO$ 中, $\angle POH=\dfrac{\pi}{3}, \therefore PH=\dfrac{3}{2}$.

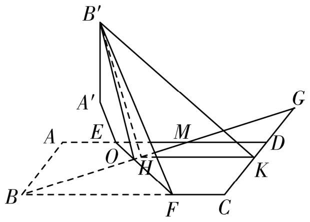
$\because S_{\text{梯形}ABCE}=\dfrac{(CE+AB)\cdot BC}{2}=\dfrac{(1+2)\times\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore V_{\text{四棱锥}P-ABCE}=\dfrac{1}{3}\times S_{\text{梯形}ABCE}\times PH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

7. B 【解析】如图①,在矩形 $ABCD$ 中,过 B 作 EF 的垂线交 EF 于 O,交 AD 于 M,交 CD 的延长线于 G. 在翻折后图形中,如图②,设 B' 在平面 AC 内的射影为 H,则 H 在直线 BM 上,过 H 作 CD 的垂线,垂足为 K,连接 $B'K$,则 $\angle B'KH$ 为二面角 $B'-CD-E$ 的平面角. 由题得 $\angle B'OH=\alpha$,

由题意知 $B'O=BO=\frac{3}{\sqrt{2}}$，$B'H=B'O\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\alpha$，则 $BH=BO+B'O\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{2}}(1+\cos\alpha)$，由 $\angle GBC=45°$，$BG=4\sqrt{2}$，得 $HG=BG-BH=4\sqrt{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}(1+\cos\alpha)$，所以 $HK=\frac{1}{\sqrt{2}}HG=4-\frac{3}{2}(1+\cos\alpha)=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\cos\alpha$，所以 $\tan\angle B'KH=\frac{B'H}{HK}=3\sqrt{2}\times\frac{\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}$. 令 $t=\frac{\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}(t>0)$，可得 $\sin\alpha+3t\cos\alpha=5t\leqslant\sqrt{1+9t^2}$，则 $0<t\leqslant\frac{1}{4}$，所以当 $t=\frac{1}{4}$，即 $\frac{\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}=\frac{1}{4}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$ 时，$\tan\angle B'KH$ 取到最大值 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$，此时 $\angle B'KH$ 最大，即二面角 $B'-CD-E$ 取得最大值. **故 B 正确.**



图①



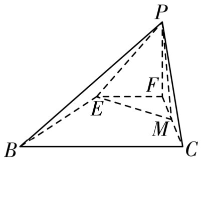
图②

8. (1)【**证明**】由 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，可知 $BC//EF$，因为 $EF\subset$ 平面 PEF，$BC\not\subset$ 平面 PEF，所以 $BC//$ 平面 PEF，又 $BC\subset$ 平面 PBC，平面 $PEF\cap$ 平面 $PBC=m$，所以 $m//BC$.

(2)【**解**】由题知 $PF=1$，$FC=2$，$PE=\frac{5}{3}$，

因为 $PF\perp PC$，所以 $PC=\sqrt{3}$，

过点 P 作 $PM\perp FC$ 于点 M，连接 EM，如图所示.



由 $S_{\triangle PFC}=\frac{1}{2}PC\cdot PF=\frac{1}{2}FC\cdot PM$，得

$PM=\frac{1\times\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $EF\perp PF$，$EF\perp FC$，PF，$FC\subset$ 平面 PFC，$PF\cap FC=F$，

所以 $EF\perp$ 平面 PFC，因为 $PM\subset$ 平面 PFC，所以 $EF\perp PM$，

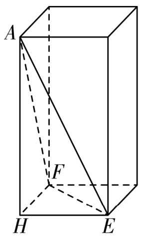
因为 $EF\cap FC=F$，EF，$FC\subset$ 平面 $BCFE$，

所以 $PM\perp$ 平面 $BCFE$，则 $\angle PEM$ 为直线 PE 与平面 $BCFE$ 所成的角，

在 Rt $\triangle PME$ 中，$\sin\angle PEM=\frac{PM}{PE}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{10}$，所以直线 PE 与平面 $BCFE$ 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{3}}{10}$.

9. ACD 【解析】因为 $AH\perp HE$，$AH\perp HF$，$HE\cap HF=H$，HE，$HF\subset$ 平面 HEF，所以 $AH\perp$ 平面 HEF，又 $EF\subset$ 平面 HEF，所以 $AH\perp EF$，**故 A 正确**；

因为 AH，HE，HF 两两垂直，$AH=2$，$HE=HF=1$，所以三棱锥 $H-AEF$ 的外接球即为其所在长方体的外接球，如图，



所以该外接球直径 $2R=\sqrt{1+1+2^2}=\sqrt{6}$，

则 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以三棱锥 $H-AEF$ 的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$，**故 B 错误**；

因为 E，F，G 分别是 BC，CD，EF 的中点，可得 $AE=AF$，$AG\perp EF$，$HG\perp EF$，且 $AG=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$HG=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$EF=\sqrt{2}$，$S_{\triangle HEF}=\frac{1}{2}HE\cdot HF=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}EF\cdot AG=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$，设点 H 到平面 AEF 的

距离为 d，由 $V_{H-AEF}=V_{A-HEF}$，得 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2$，解得 $d=\frac{2}{3}$，即点 H 到平面 AEF 的距离为 $\frac{2}{3}$，**故 C 正确**；

因为 $AG\perp EF$，$HG\perp EF$，所以 $\angle AGH$ 即为二面角 $A-EF-H$ 的平面角，在 $\mathrm{Rt}\triangle AHG$ 中，由 $AG=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$HG=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\cos\angle AGH=\frac{HG}{AG}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{3}$，**故 D 正确. 故选 ACD.**

10. ABD 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $AB^2=CB^2+CA^2-2\cdot CB\cdot CA\cdot\cos C=4+12-2\times2\times2\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=4$，所以 $AB=2$.

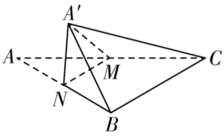
所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，腰长为 2，$\angle A=\angle C=\frac{\pi}{6}$，$\angle B=\frac{2\pi}{3}$.

如图①所示，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，N 为 AB 中点，

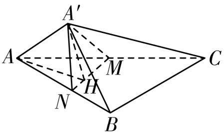
又 M 为 AC 中点，所以 $MN//BC$，

因为 $BC\not\subset$ 平面 $A'MN$，$MN\subset$ 平面 $A'MN$，

所以 $BC//$ 平面 $A'MN$. **故 A 正确.**



图①



图②

如图②所示，过点 A 作 $AH\perp MN$，垂足为 H，连接 $A'H$，根据翻折的性质可知 $A'H\perp MN$，

又 $AH,A'H\subset$ 平面 $AA'H$，$AH\cap A'H=H$，所以 $MN\perp$ 平面 $AA'H$.

又 $AA'\subset$ 平面 $AA'H$，所以 $MN\perp AA'$. **故 B 正确.**

当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时，$AN=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$.

在 $\triangle AMN$ 中，由余弦定理可得 $MN^2=AM^2+AN^2-2\cdot AM\cdot AN\cdot\cos\angle NAM=3+\frac{9}{4}-2\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}$，

因为 $AN^2+MN^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3=AM^2$，所以

$\triangle AMN$ 为直角三角形，

所以线段 AM 所扫过的曲面是圆锥侧面的一部分.

在$\triangle ANA'$中，$NA=NA'=\frac{3}{2}$，$AA'=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，由余弦定理可得 $\cos\angle ANA'=\frac{NA^2+NA'^2-AA'^2}{2\cdot NA\cdot NA'}=\frac{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-\frac{27}{4}}{2\times\frac{9}{4}}=-\frac{1}{2}$，又

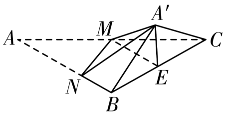
因为$\angle ANA'\in(0,\pi)$，所以$\angle ANA'=\frac{2\pi}{3}$.

所以线段 AM 扫过的曲面面积为$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot NA\cdot MA=\frac{\pi}{3}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$，故 C 错误.

如图③所示，因为点 A'在平面 ABC 的射影恰好落在线段 BC 上，设为点 E，则 $A'E\perp$平面 ABC.

设 $A'M$ 与平面 ABC 所成的角为$\angle A'ME$，记为 θ，则 $\sin\theta=\frac{A'E}{A'M}=\frac{A'E}{\sqrt{3}}$.

而当 $ME\perp BC$ 时，ME 有最小值，为$\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $A'E=\sqrt{A'M^2-ME^2}\leqslant\sqrt{3-\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$，所以 $\sin\theta\leqslant\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故 D 正确. 故选 ABD.



图③

专题上分 11 动态轨迹问题

1. D

思路导引 取 AB 的中点 M，连接 CM 并延长交 DA 的延长线于 N，由条件得 $AD_1\perp$平面 A_1DC，$NA_1//AD_1$，所以 $NA_1\perp$平面 A_1DC，从而可证得平面 $A_1MC\perp$平面 A_1DC，结合题意可得 $Q\in MC$，即可得解.

【解析】如图，取 AB 的中点 M，连接 CM 并延长交 DA 的延长线于 N，

由 $BC//AD$，可得$\frac{BC}{AN}=\frac{BM}{AM}=1$，所以 $AN=$

$BC=AD$,所以 A 为 ND 的中点.

连接 AD_1,A_1M,A_1N,由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 可得 $AD_1\perp A_1D$,

又 $CD\perp$ 平面 ADD_1A_1,$AD_1\subset$ 平面 ADD_1A_1,所以 $CD\perp AD_1$,

又 $A_1D\cap CD=D$,A_1D,$CD\subset$ 平面 A_1DC,

所以 $AD_1\perp$ 平面 A_1DC.

因为 $A_1D_1//AD$,$A_1D_1=AN$,所以四边形 NAD_1A_1 是平行四边形,

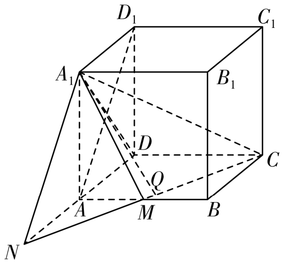
所以 $NA_1//AD_1$,所以 $NA_1\perp$ 平面 A_1DC,

因为 $NA_1\subset$ 平面 A_1MC,所以平面 $A_1MC\perp$ 平面 A_1DC.

又因为 Q 为底面 $ABCD$(含边界)上的动点,满足平面 $A_1QC\perp$ 平面 A_1DC,

所以 $Q\in MC$,即点 Q 的轨迹是线段 MC,

故选 D.



2. D 【**解析**】分别取线段 CD,C_1D_1,B_1C_1 的中点 E,F,G,连接 EF,EP,FG,GP,如图所示.

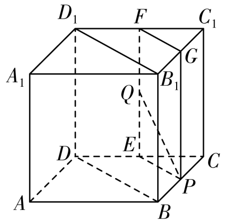
易知 $EF//CC_1$,$PG//CC_1$,所以 $EF//PG$,所以 E,F,G,P 四点共面,又因为 $BB_1//PG$,$BB_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,$PG\not\subset$ 平面 BB_1D_1D,所以 $PG//$ 平面 BB_1D_1D,又因为 $D_1B_1//FG$,$D_1B_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,$FG\not\subset$ 平面 BB_1D_1D,所以 $FG//$ 平面 BB_1D_1D,

又因为 $FG\cap PG=G$,FG,$PG\subset$ 平面 $EFGP$,所以平面 $EFGP//$ 平面 BB_1D_1D.

因为 Q 为四边形 CC_1D_1D 及其内部的动点,所以当 $Q\in EF$,即 $PQ\subset$ 平面 $EFGP$ 时,有 $PQ//$ 平面 BB_1D_1D,

由正方体的性质可知 $QE\perp$ 平面 $ABCD$,所以 PQ 与平面 $ABCD$ 所成角即为 $\angle QPE$,又因为 $\tan\angle QPE=\dfrac{QE}{PE}$,设正方体的棱长为 2,则 $\tan\angle QPE=\dfrac{QE}{\sqrt{2}}$,

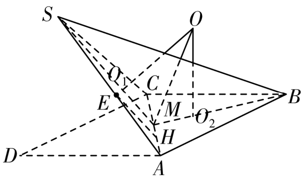
此时 $QE\in[0,2]$,所以 $\tan\angle QPE=\dfrac{QE}{\sqrt{2}}\in[0,\sqrt{2}]$,**故选** D.



3. $\dfrac{25\pi}{3}$

思路导引 取 AC 中点 M，连接 BM，SM，作 $EH\perp AC$ 于 H，设点 F 轨迹所在平面为 α，则平面 α 经过点 H 且 $AC\perp\alpha$，设三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球心为 O，$\triangle SAC$，$\triangle BAC$ 的中心分别为 O_1，O_2，连接 OO_1，OO_2，OM，则 $OO_1\perp$ 平面 SAC，$OO_2\perp$ 平面 BAC，且 O，O_1，O_2，M 四点共面，求出三棱锥 $S-ABC$ 的外接球半径及截面圆半径后可得结论.

【解析】取 AC 中点 M，连接 BM，SM，如图所示.



则 $AC\perp BM$，$AC\perp SM$，$BM\cap SM=M$，BM，$SM\subset$ 平面 SMB，

所以 $AC\perp$ 平面 SMB，

由题意 $SM=BM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$，又 $SB=6$，

所以由余弦定理得，$\cos\angle SMB=\dfrac{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-6^2}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$，

因为 $\angle SMB$ 是三角形内角，

所以 $\angle SMB=120°$.

作 $EH\perp AC$ 于点 H，设点 F 轨迹所在平面为 α，则平面 α 经过点 H 且 $AC\perp\alpha$，

设三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球心为 O，$\triangle SAC$，$\triangle BAC$ 的中心分别为 O_1，O_2，连接 OO_1，OO_2，OM，如图，

易知 $OO_1\perp$ 平面 SAC，$OO_2\perp$ 平面 BAC，且 O，O_1，O_2，M 四点共面，

易知 $\triangle SAC\cong\triangle BAC$，由球的性质知 $OO_1=OO_2$，从而 $O_1M=O_2M$，即 OM 是 $\angle O_1MO_2$ 的角平分线，

所以 $\angle OMO_1=\frac{1}{2}\angle O_1MO_2=60°$，$O_1M=\frac{1}{3}SM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$OO_1=\sqrt{3}O_1M=2$，

又 $O_1S=\frac{2}{3}SM=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

则三棱锥 $S-ABC$ 外接球半径 $r=\sqrt{OO_1^2+O_1S^2}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，

易知 O 到平面 α 的距离 $d=MH=1$，

故平面 α 截外接球所得截面圆的半径 $r_1=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{\frac{28}{3}-1}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$，

所以截面圆的面积为 $\frac{25\pi}{3}$，即点 F 轨迹所形成图形的面积为 $\frac{25\pi}{3}$.

方法总结 有关线线垂直的动点轨迹问题往往转化为线面垂直问题，动点的轨迹一般情况下位于与题干中所给定直线垂直的平面上.

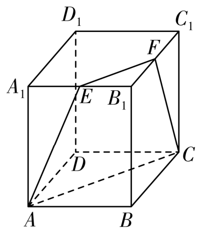
4. A 【解析】由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AE}$ 知，点 P 的轨迹在平面 ACE 与长方体表面的交线所围成的图形上，

如图所示，取 B_1C_1 的中点 F，连接 EF，CF，易知 $EF//AC$，

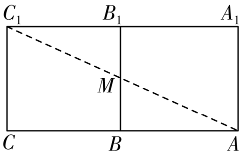
又 $AE=CF=\sqrt{34}$，所以四边形 $EFCA$ 为等腰梯形，

易知 $AC=2EF=4\sqrt{2}$，由此可算出其高 $h=4\sqrt{2}$，

所以等腰梯形 $EFCA$ 的面积为 $\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times4\sqrt{2}=24$. **故选 A.**



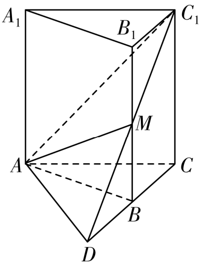
5. C 【解析】作出侧面 ABB_1A_1，BCC_1B_1 的展开图如图①所示，连接 AC_1，当 M 为 BB_1 的中点时，$AM+MC_1$ 最小，即截面 AMC_1 的周长最小.



图①

如图②所示，延长 C_1M，CB 交于点 D，平面 AMC_1 与平面 ABC 的交线为 AD，

当 M 为 BB_1 的中点时，$AB=BC=B_1C_1=BD=2$，在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $AD^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$，因为 $AD^2+AC^2=CD^2$，所以 $AD\perp AC$，



图②

因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$AD\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp AD$，$AA_1\cap AC=A$，AA_1，$AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $AD\perp$ 平面 ACC_1A_1，又 $AC_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $AD\perp AC_1$，

故 $\angle CAC_1$ 即为平面 AMC_1 与平面 ABC 所成角的平面角，因为 $AC=CC_1=2$，$\angle C_1CA=90°$，所以 $\angle CAC_1=45°$. **故选 C.**

6. B 【解析】连接 AE，AF，分别交 A_1G，A_1H 于点 P，Q，连接 PQ.

因为点 M 在线段 EF 上运动，故 AM 在平面 AEF 内，

又因为 AM 与平面 A_1GH 交于点 N，

故点 N 的轨迹在平面 AEF 与平面 A_1GH 的交线上，即线段 PQ.

因为 G，H，F 分别为棱 AB，AC，CC_1 的中点，所以易知 $\triangle AA_1G\cong\triangle AA_1H\cong\triangle ACF$，

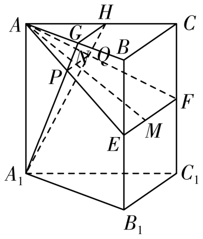
所以 $A_1G=A_1H=AF=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\angle FAC=\angle AA_1H$，

因为 $\angle AA_1H+\angle AHA_1=90°$，所以 $\angle FAC+\angle AHA_1=90°$，即 $A_1H\perp AF$，

所以 $\frac{1}{2}\cdot A_1H\cdot AQ=\frac{1}{2}\cdot AH\cdot AA_1$，解得 $AQ=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $AQ=\frac{2}{5}AF$，

同理，$AP=\frac{2}{5}AE$，故 $PQ\parallel EF$，且 $PQ=$

$\frac{2}{5}EF=\frac{2}{5}$,**故选** B.

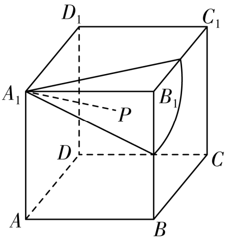


7. B

思路导引 根据直线 A_1P 与 DC 所成角为 $\frac{\pi}{6}$,得直线 A_1P 与直线 A_1B_1 所成角为 $\frac{\pi}{6}$,动点 P 的轨迹所围成的图形是圆锥侧面的四分之一,根据圆锥的侧面积公式求解即可.

【**解析**】如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$DC/\!/A_1B_1$,直线 A_1P 与 DC 所成角为 $\frac{\pi}{6}$,即直线 A_1P 与直线 A_1B_1 所成角为 $\frac{\pi}{6}$,故动点 P 的轨迹所围成的图形是高为$\sqrt{3}$,底面半径为 1,母线长为 2 的圆锥侧面的四分之一.

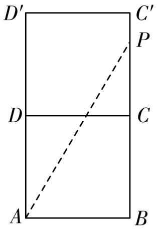
故动点 P 的轨迹所围成的图形的面积为 $\frac{1}{4}\times\pi\times1\times2=\frac{\pi}{2}$,**故选** B.



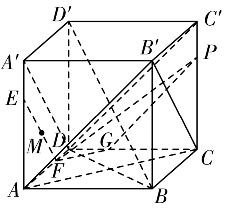
8. BCD

思路导引 根据正方体展开后的平面图可判断 A;过点 P 作平面 $PGF/\!/$平面 ACB',即可判断 B;根据点 M 的轨迹是圆弧,即可判断 C;利用通法攻略 45 中的延长线法作出正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 被平面 $AD'P$ 所截的截面即可判断 D.

【**解析**】将正方体的底面和侧面展开可得如图①所示的平面图,连接 AP,则 $AP=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}<\sqrt{73}$,**故** A **错误**.



图①



图②

如图②所示，连接 AC，BD，BD'，AB'，DC'，$B'C$，$\because$ $DD'\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ $DD'\perp AC$，

又 $AC\perp BD$，$DD'\cap BD=D$，DD'，$BD\subset$ 平面 $DD'B$，$\therefore$ $AC\perp$ 平面 $DD'B$，$\because$ $BD'\subset$ 平面 $DD'B$，$\therefore$ $AC\perp BD'$，

同理可得 $BD'\perp AB'$，又 $AC\cap AB'=A$，AC，$AB'\subset$ 平面 ACB'.

$\therefore$ $BD'\perp$ 平面 ACB'，$\therefore$ 过点 P 作 $PG/\!/C'D$ 交 CD 交于点 G，过点 G 作 $GF/\!/AC$ 交 AD 于点 F，连接 PF，

由 $AB'/\!/C'D$ 可得 $PG/\!/AB'$，又 $PG\not\subset$ 平面 ACB'，$AB'\subset$ 平面 ACB'，

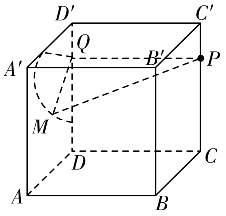
$\therefore$ $PG/\!/$ 平面 ACB'，同理可得 $GF/\!/$ 平面 ACB'，$\because$ $PG\cap GF=G$，PG，$GF\subset$ 平面 PGF，则平面 $PGF/\!/$ 平面 ACB'.

连接 $A'D$，设平面 PEF 交平面 $ADD'A'$ 于 EF，则 M 的运动轨迹为线段 EF，

由点 P 在棱 CC' 上，且 $PC'=1$，可得 $DG=DF=1$，$EF/\!/B'C$，$\therefore$ $EF=\dfrac{3}{4}A'D=3\sqrt{2}$，**故 B 正确.**

如图③所示，连接 PM，若 $PM=2\sqrt{5}$，则 M 在以 P 为球心，$2\sqrt{5}$ 为半径的球面上，过点 P 作 $PQ\perp$ 平面 $ADD'A'$，连接 QM，则 $D'Q=1$，此时 $QM=\sqrt{PM^2-PQ^2}=2$.

$\therefore$ 点 M 在以 Q 为圆心，2 为半径的圆弧上运动，此时圆心角为 $\dfrac{2\pi}{3}$. $\therefore$ 点 M 的运动轨迹长度为 $\dfrac{2\pi}{3}\times2=\dfrac{4\pi}{3}$，**故 C 正确.**



图③

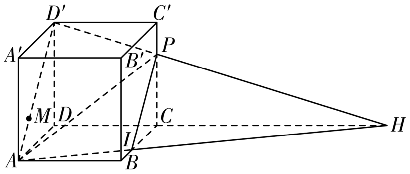
如图④所示，延长 DC，$D'P$ 交于点 H，连

接 AH 交 BC 于点 I，连接 PI，AP，AD'，

$\therefore$ 正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 被平面 $AD'P$ 截得的截面为四边形 $AIPD'$.

$\because \triangle PCH \backsim \triangle D'DH$，$\therefore \dfrac{PH}{D'H}=\dfrac{PC}{DD'}=\dfrac{HC}{DH}=\dfrac{3}{4}$，$\because \triangle ICH \backsim \triangle ADH$，$\therefore \dfrac{CI}{DA}=\dfrac{HC}{DH}=\dfrac{IH}{AH}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore \dfrac{PH}{D'H}=\dfrac{IH}{AH}=\dfrac{PI}{AD'}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore PI // AD'$，且 $PI \neq AD'$，$\therefore$ 四边形 $AIPD'$ 为梯形，

$AI=PD'=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$，$\therefore$ 四边形 $AIPD'$ 为等腰梯形，**故 D 正确. 故选 BCD.**

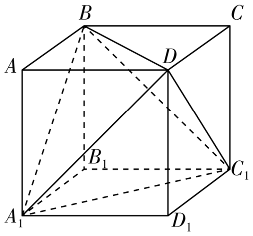


图④

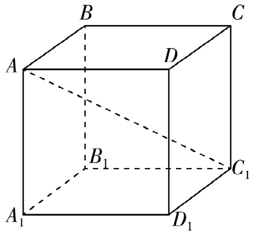
真题上分

1. ABD　【解析】对于 A 选项，正方体内切球的直径为 1 m，**故 A 符合题意；**

对于 B 选项，如图，正方体内部最大的正四面体棱长为 $BA_1=\sqrt{2}$ m，$\sqrt{2}$ m>1.4 m，**故 B 符合题意；**

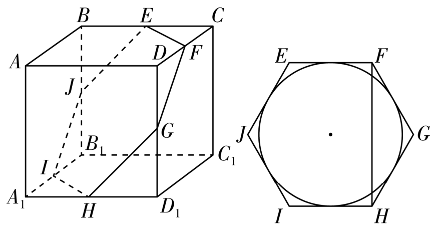


对于 C 选项，圆柱底面直径为 0.01 m，可忽略不计，高为 1.8 m，圆柱可看作长度为 1.8 m 的线段. 如图，正方体的体对角线为 $AC_1=\sqrt{3}$ m<1.8 m，**故 C 不符合题意；**



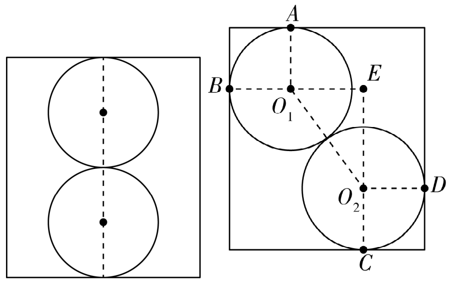
对于 D 选项，圆柱高为 0.01 m，可忽略不计，底面直径为 1.2 m，圆柱可看作直径为 1.2 m 的圆. 如图，E，F，G，H，I，J 为各棱的中点，六边形 $EFGHIJ$ 为正六边形，其

边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$ m，其内切圆直径 $FH=\sqrt{3}FG=\frac{\sqrt{6}}{2}$ m，$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{6}{4}>(1.2)^2=1.44$，**故 D 符合题意.**



2. $\frac{5}{2}$ 【解析】设铁球的半径为 $R(0<R<4)$，情形一：两个铁球的球心都在圆柱的轴上，且两球分别与圆柱的上、下底面相切，其轴截面如图①，则 $4R=9$，则 $R=\frac{9}{4}$；情形二：两球均分别与圆柱的一个底面和侧面相切，其轴截面如图②，则 $\begin{cases}O_1E+2R=8,\\O_2E+2R=9,\\O_1E^2+O_2E^2=O_1O_2^2=4R^2,\end{cases}$ 解得 $R=\frac{5}{2}$ 或 $R=\frac{29}{2}$（舍去）.

由于$\frac{9}{4}<\frac{5}{2}$，故 R 的最大值为$\frac{5}{2}$.

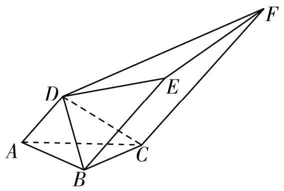


图①　　图②

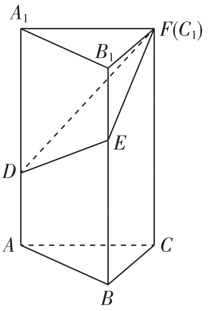
3. B 【解析】设圆柱、圆锥的底面半径为 r，则圆锥的母线长为 $\sqrt{r^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{r^2+3}$. 又圆柱与圆锥的侧面积相等，所以 $2\pi r\cdot\sqrt{3}=\pi r\sqrt{r^2+3}$，解得 $r=3$，所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times3^2\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi$，**故选 B.**

4. C 【解析】由已知可得，三条平行线中的任意一条到另外两条确定的平面的距离 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 如图，连接 BD,CD，则五面体的体积 $V=V_{三棱锥C-ABD}+V_{四棱锥D-BCFE}$，其中

$V_{三棱锥C-ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$，$V_{四棱锥D-BCFE}=\frac{1}{3}S_{梯形BCFE}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+3)\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$，$\therefore V=V_{三棱锥C-ABD}+V_{四棱锥D-BCFE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **故选 C.**



一题多解 如图，不妨将该五面体看作由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 截去四棱锥 $C_1-A_1B_1ED$ 得到的，此时的五面体 $ABC-DEF$ 仍满足题意.



结合题意可知，在五面体 $ABC-DEF$ 中，$AB=BC=AC=1$，$AD=1$，$BE=2$，$CF=3$，且 $AD/\!/BE/\!/CF$.

$\therefore A_1D=2$，$B_1E=1$，

$\therefore V_{ABC-DEF}=V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_{C_1-B_1EDA_1}$

$=S_{\triangle ABC}\cdot CF-\frac{1}{3}\cdot S_{梯形B_1EDA_1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3-\frac{1}{3}\times\frac{(1+2)\times1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

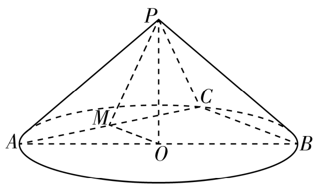
$=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **故选 C.**

5. AC 【**解析**】对于 A，依题意，圆锥母线长 $l=PA=PB=2$，$PO=PA\cdot\cos 60°=1$，$AO=BO=PA\cdot\sin 60°=\sqrt{3}$，所以底面圆的半径 $r=\sqrt{3}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot1=\pi$，**故 A 正确**；

对于 B，该圆锥的侧面积为 $\pi rl=\pi\cdot\sqrt{3}\cdot2=2\sqrt{3}\pi$，**故 B 错误**；

对于 C，如图，取 AC 的中点 M，连接 PM，OM，则 $OM\perp AC$，又因为 $PA=PC$，所以 $PM\perp AC$，故 $\angle PMO$ 为二面角 $P-AC-O$ 的平面角，即 $\angle PMO=45°$，所以 $\tan 45°=$

$\frac{PO}{OM}=1$，即 $OM=1$，所以 $AC=2\sqrt{AO^2-OM^2}=2\times\sqrt{3-1}=2\sqrt{2}$，故 C 正确；

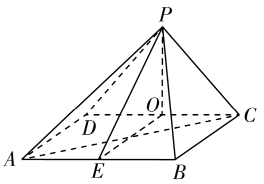


对于 D，由选项 C 可知，$AC=2\sqrt{2}$，$PM\perp AC$，$PM=\sqrt{PA^2-\left(\frac{1}{2}AC\right)^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$，所以 $\triangle PAC$ 的面积为 $\frac{1}{2}PM\cdot AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=2$，故 D 错误. 故选 AC.

6. C　【解析】如图，取 CD 的中点为 O，AB 的中点为 E，连接 PO，OE，PE，因为 $PC=PD$，所以 $PO\perp CD$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，CD 的中点为 O，AB 的中点为 E，所以 $OE\perp CD$，$AB/\!/CD$. 又 $PO\cap OE=O$，所以 $CD\perp$ 平面 POE. 因为 $PE\subset$ 平面 POE，所以 $CD\perp PE$，所以 $AB\perp PE$，所以 $PB=PA$. 在 $\triangle PAC$ 中，$PC=3$，$\angle PCA=45°$，$AC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，由余弦定理得，$PA^2=PC^2+AC^2-2PC\cdot AC\cdot\cos45°=9+32-2\times3\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，则 $PA=PB=\sqrt{17}$.

在 $\triangle PBC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle PCB=\frac{PC^2+BC^2-PB^2}{2PC\cdot BC}=\frac{9+16-17}{2\times3\times4}=\frac{1}{3}$，则 $\sin\angle PCB=\sqrt{1-\cos^2\angle PCB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

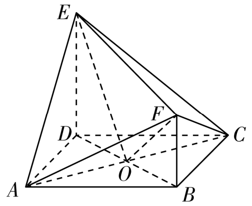
所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}PC\cdot BC\cdot\sin\angle PCB=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$，故选 C.



7. A　【解析】由题意，得正三棱台上、下底面的外接圆的半径分别为 $\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3\sqrt{3}=3$，$\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{3}=4$. 设该正三棱

台上、下底面的外接圆的圆心分别为 O_1,O_2，外接球的半径为 R，球心为 O，则 $O_1O_2=1$，球心 O 在直线 O_1O_2 上. 由于球心位置不能确定，需分球心在线段 O_1O_2 上和不在线段 O_1O_2 上两种情况讨论. 当球心在线段 O_1O_2 上时，$R^2=3^2+OO_1^2=4^2+(1-OO_1)^2$，解得 $OO_1=4>1$，不符合题意；当球心不在线段 O_1O_2 上，即球心在线段 O_1O_2 的延长线上时，$R^2=4^2+OO_2^2=3^2+(1+OO_2)^2$，解得 $OO_2=3$，所以 $R^2=25$. 综上，球 O 的表面积为 $4\pi R^2=100\pi$，**故选 A.**

8. CD 【解析】如图，连接 BD 交 AC 于 O，连接 OE，OF.



设 $AB=ED=2FB=2$，则 $AB=BC=CD=AD=2$. 由 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，$FB/\!/ED$，得 $FB\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $V_1=V_{E-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot ED=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot ED=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$，$V_2=V_{F-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot FB=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot FB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times1=\frac{2}{3}$.

关键：求棱锥体积的关键是确定高，常常结合直线与平面的位置关系确定

$ED\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $ED\perp AC$. 又 $AC\perp BD$，且 $ED\cap BD=D$，$ED,BD\subset$ 平面 $BDEF$，所以 $AC\perp$ 平面 $BDEF$.

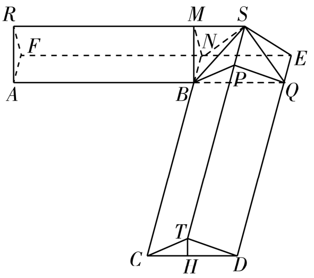
又 $OF\subset$ 平面 $BDEF$，所以 $AC\perp OF$.

易知 $BD=2\sqrt{2}$，$OB=OD=\sqrt{2}$，$OF=\sqrt{OB^2+FB^2}=\sqrt{3}$，$OE=\sqrt{OD^2+ED^2}=\sqrt{6}$，$EF=\sqrt{BD^2+(ED-FB)^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2-1)^2}=3$，所以 $EF^2=OE^2+OF^2$，所以 $OF\perp OE$，而 $OE\cap AC=O$，OE，$AC\subset$ 平面 ACE，所以 $OF\perp$ 平面 ACE.

又 $AC=AE=CE=2\sqrt{2}$，所以 $V_3=V_{F-ACE}=$

$\frac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot OF=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2\cdot OF=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}=2$，所以有 $V_3\neq 2V_2$，$V_3\neq V_1$，$V_3=V_1+V_2$，$2V_3=3V_1$，**所以选项 A，B 不正确，选项 C，D 正确，故选 CD.**

9. 60　【解析】如图，延长 AB 交 DE 于点 Q，作 $BP\parallel CT$，交 ST 于点 P，连接 PQ，SQ，



延长 CB 交 EF 于点 N，连接 SN，作 $MN\parallel RF$ 交 RS 于点 M，连接 BM. 由题中已知的线面关系可知，几何体 $ARF-BMN$ 与几何体 $CDT-BQP$ 均为直三棱柱，且 $V_{ARF-BMN}=V_{CDT-BQP}$，几何体 $S-BQEN$ 为正四棱锥，几何体 $S-MNB$ 为三棱锥，且 $SM\perp$ 平面 BMN，几何体 $S-BPQ$ 为三棱锥，且 $SP\perp$ 平面 BPQ.

在 $\triangle CDT$ 中，过点 T 作 $TH\perp CD$ 于点 H，由 $CT=DT=\frac{5}{2}$，$CD=4$，可得 $TH=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$，$\therefore S_{\triangle CDT}=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{2}=3.$ $\because BC=8$，$\therefore V_{CDT-BQP}=3\times 8=24$.

$\because$ 平面 $TCD\perp$ 平面 ABC，$TH\perp CD$，$TH\subset$ 平面 TCD，平面 $TCD\cap$ 平面 $ABC=CD$，

$\therefore TH\perp$ 平面 ABC，结合题中已知的线面位置关系可得 TH 为多面体的高.

又几何体 $S-BQEN$ 的底面边长 $BQ=4$，则 $V_{S-BQEN}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 4^2=8$. 又 $S_{\triangle BMN}=S_{\triangle ARF}=S_{\triangle CDT}=S_{\triangle BPQ}=3$，$SM=SP=CH=2$，

$\therefore V_{S-MNB}=V_{S-BPQ}=\frac{1}{3}\times 2\times 3=2$.

$\therefore$ 该多面体的体积 $V=V_{ARF-BMN}+V_{CDT-BQP}+V_{S-BQEN}+V_{S-MNB}+V_{S-BPQ}=2V_{CDT-BQP}+V_{S-BQEN}+2V_{S-MNB}=2\times 24+8+2\times 2=60$.

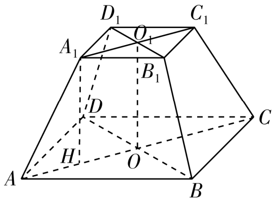
10. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　【解析】$\because$ 圆台甲、乙的上、下底面半

径均相等，∴ $\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{h_{甲}}{h_{乙}}=\frac{\sqrt{[2(r_2-r_1)]^2-(r_2-r_1)^2}}{\sqrt{[3(r_2-r_1)]^2-(r_2-r_1)^2}}=\frac{\sqrt{3}(r_2-r_1)}{2\sqrt{2}(r_2-r_1)}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

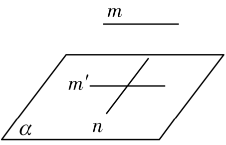
11. $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ 【解析】如图，连接 AC，BD 交于点 O，连接 A_1C_1，B_1D_1 交于点 O_1，连接 OO_1，过点 A_1 作 $A_1H\perp AC$ 于点 H，则 OO_1 为正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高.

在等腰梯形 A_1ACC_1 中，$AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，$A_1C_1=\sqrt{2}A_1B_1=\sqrt{2}$，则 $AO=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，$A_1O_1=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $AA_1=\sqrt{2}$，所以 $A_1H=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $OO_1=A_1H=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times(1^2+2^2+\sqrt{1^2\times2^2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.



12. C 【解析】

选项	分析	正误
A	m 与 n 也可能垂直，如图，$m/\!/m'$，$m'\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m'\perp n$，可知 $m\perp n$ 	×
B	垂直于同一条直线的两平面平行	×
C	∵ $m/\!/\alpha$，∴ 存在直线 m' 使得 $m'\subset\alpha$，且 $m/\!/m'$，又 $m\perp\beta$，∴ $m'\perp\beta$，∴ $\alpha\perp\beta$	√
D	若 $\alpha\cap\beta=n$，则当 m 与 n 重合时，$m\subset\beta$	×

13. BD 【解析】对于 A，由正三棱柱的性

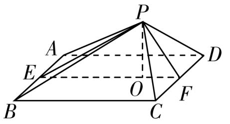
质可知，$AA_1 \perp$平面ABC，又$AD \subset$平面ABC，则$AA_1 \perp AD$，假设$AD \perp A_1C$，又$AA_1 \cap A_1C = A_1$，AA_1，$A_1C \subset$平面AA_1C_1C，所以$AD \perp$平面AA_1C_1C，矛盾，所以AD与A_1C不垂直，**故 A 错误**.

对于 B，$\because AA_1 \perp$平面ABC，$BC \subset$平面ABC，$\therefore AA_1 \perp BC$. 又$AD \perp BC$，$AD \cap AA_1 = A$，AD，$AA_1 \subset$平面AA_1D，$\therefore BC \perp$平面AA_1D，又$B_1C_1 // BC$，$\therefore B_1C_1 \perp$平面AA_1D，**故 B 正确**.

对于 C，$AB // A_1B_1$，AB，$A_1B_1 \subset$平面ABB_1A_1，$AD \cap$平面$ABB_1A_1 = AD \cap AB = A$，所以$AD$与$A_1B_1$异面，**故 C 错误**.

对于 D，$\because CC_1 // AA_1$，$AA_1 \subset$平面AA_1D，$CC_1 \not\subset$平面AA_1D，$\therefore CC_1 //$平面AA_1D，**故 D 正确. 故选** BD.

14. D 【解析】四棱锥的底面是边长为 4 的正方形，且$PA = PB = 4$，$PC = PD = 2\sqrt{2}$，如图，设AB，CD的中点分别为E，F，连接EF，PE，PF，则$PE \perp AB$，$PF \perp CD$.



$\because EF \perp CD$，$PF \perp CD$，$EF \cap PF = F$，$EF \subset$平面PEF，$PF \subset$平面PEF，$\therefore CD \perp$平面PEF.

又$CD \subset$平面$ABCD$，$\therefore$平面$PEF \perp$平面$ABCD$，且平面$PEF \cap$平面$ABCD = EF$.

过点P作$PO \perp EF$于点O，则$PO \subset$平面PEF，则$PO \perp$平面$ABCD$.

在$\triangle PEF$中，由题可求得$PE = 2\sqrt{3}$，$PF = 2$，$EF = 4$，$\therefore PE^2 + PF^2 = EF^2$，$\therefore \angle EPF = 90°$，根据面积相等可得$PO \cdot EF = PE \cdot PF$，即$4PO = 2\sqrt{3} \times 2$，得$PO = \sqrt{3}$. **故选** D.

15. (1)【**证明**】$\because PA \perp$底面$ABCD$，$AB \subset$底面$ABCD$，$\therefore PA \perp AB$，又$AB \perp AD$，$PA \cap AD = A$，PA，$AD \subset$平面PAD，$\therefore AB \perp$平面PAD.

又$AB \subset$平面PAB，$\therefore$平面$PAB \perp$平面PAD.

一题多解 $\because PA \perp$平面$ABCD$，$PA \subset$平面PAB，$\therefore$平面$PAB \perp$平面$ABCD$.

$\because$平面$PAB \cap$平面$ABCD = AB$，$AD \subset$平面$ABCD$，$AD \perp AB$，

$\therefore AD \perp$平面PAB，$\because AD \subset$平面PAD，

$\therefore$平面$PAB \perp$平面PAD.

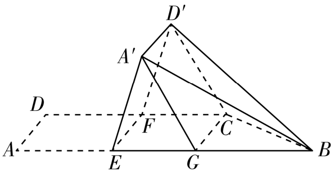
16. (1)【证明】如图,过 C 作 $CG//EF$ 交 EB 于 G,连接 $A'G$. 因为 $EF//AD$,$AB//CD$,$\angle DAB=90°$,所以四边形 $ADFE$ 为矩形,四边形 $EFCG$ 为矩形,所以 $EF \underline{\parallel} AD$,$EF \underline{\parallel} CG$,所以 $CG \underline{\parallel} AD$,所以 $CG \underline{\parallel} A'D'$,所以四边形 $A'D'CG$ 为平行四边形.

所以 $CD'//A'G$,又 $A'G\subset$平面 $A'BE$,$CD'\not\subset$平面 $A'BE$,所以$CD'//$平面 $A'BE$.

因为 $CF//EB$,$EB\subset$平面 $A'BE$,$CF\not\subset$平面 $A'BE$,所以 $CF//$平面 $A'BE$.

又 CD',$CF\subset$平面 $CD'F$,$CD'\cap CF=C$,所以平面 $CD'F//$平面 $A'BE$.

因为 $A'B\subset$平面 $A'BE$,所以 $A'B//$平面 $CD'F$.



17. (1)【证明】由 $BC=2$,$AD=4$,点 M 为 AD 的中点得 $BC=DM$. 又 $BC//MD$,所以四边形 $BCDM$ 为平行四边形,则 $BM//CD$.

又 $CD\subset$平面 CDE,$BM\not\subset$平面 CDE,所以 $BM//$平面 CDE.

(2)【解】如图,连接 FM,因为 $EF//AD$,$EF=\dfrac{1}{2}AD$,M 是 AD 的中点,所以四边形 $EFMD$ 是平行四边形,所以$FM \underline{\parallel} ED$.

因为四边形 $ADEF$ 是等腰梯形,所以 $\triangle AMF$ 是等腰三角形.

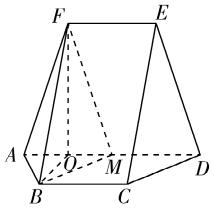
同理,$\triangle AMB$ 也是等腰三角形.

取 AM 的中点 O,连接 OF,OB,则 $OF\perp AM$,$OB\perp AM$.

又 $OB\cap OF=O$,OB,$OF\subset$平面 BOF,所以 $AM\perp$平面 BOF.

又 $AD=4$,$ED=\sqrt{10}$,$AB=2$,所以 $OF=3$,$OB=\sqrt{3}$.

又 $FB=2\sqrt{3}$,所以 $OF^2+OB^2=FB^2$,故 $OF\perp OB$,$S_{\triangle FOB}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

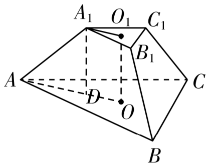


在$\triangle ABF$中，因为$AB=2$，$AF=\sqrt{10}$，$FB=2\sqrt{3}$，所以由余弦定理得$\cos\angle ABF=\dfrac{AB^2+FB^2-AF^2}{2AB\cdot FB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，所以$\sin\angle ABF=\sqrt{1-\cos^2\angle ABF}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$，所以$S_{\triangle FAB}=\dfrac{1}{2}AB\cdot FB\cdot\sin\angle ABF=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{13}}{4}=\dfrac{\sqrt{39}}{2}$.

设M到平面ABF的距离为h，则$V_{M-ABF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle FAB}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\triangle FOB}\cdot AM$，解得$h=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$，故$M$到平面$FAB$的距离为$\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.

18. B 【解析】设正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的高为h. $\because AB=6$，$A_1B_1=2$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times6\times6\times\sin\dfrac{\pi}{3}=9\sqrt{3}$，$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. $\because$正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的体积$V=\dfrac{1}{3}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_1B_1C_1}+\sqrt{S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}})h=\dfrac{1}{3}\times(9\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{9\sqrt{3}\times\sqrt{3}})h=\dfrac{13\sqrt{3}}{3}h=\dfrac{52}{3}$，$\therefore h=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

如图，设$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$的中心分别为O，O_1，连接A_1O_1，O_1O，AO，作$A_1D\perp$平面ABC交平面ABC于点D，由几何体$ABC-A_1B_1C_1$为正三棱台可知，点D在AO上，且四边形A_1O_1OD为矩形，其中$\angle A_1AD$即为直线A_1A与平面ABC所成的角.



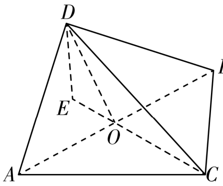
由$AB=6$，$A_1B_1=2$，可得$OA=2\sqrt{3}$，$O_1A_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

提示：边长为a的正三角形的中心到各顶点的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore AD=OA-OD=OA-O_1A_1=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \tan\angle A_1AD=\dfrac{A_1D}{AD}=\dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=1$. **故选 B.**

19. C 【解析】如图,设 AB 的中点为 O,连接 CO,DO,则 $CO\perp AB,DO\perp AB$,于是 $\angle COD$ 即为二面角 $C-AB-D$ 的平面角.



过点 D 作 $DE\perp$平面 ABC,则点 E 一定落在 CO 的延长线上,$\angle DCE$ 即直线 CD 与平面 ABC 所成的角.

不妨设 $AB=2$,在 $\mathrm{Rt}\triangle EOD$ 中,$DO=\sqrt{3}$,

$\angle EOD=180°-150°=30°$,则 $DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$EO=\dfrac{3}{2}$.

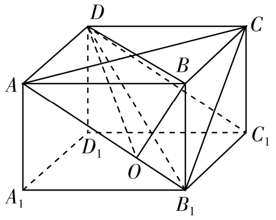
又 $CO=\dfrac{1}{2}AB=1$,所以 $EC=\dfrac{5}{2}$,

$\tan\angle DCE=\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$,**故选 C.**

另解:在 $\triangle DOC$ 中,根据余弦定理得 $CD^2=DO^2+CO^2-2DO\cdot CO\cdot\cos 150°=3+1+3=7$. 所以 $\sin\angle DCE=\dfrac{DE}{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$,所以 $\tan\angle DCE=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

20. D 【解析】在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,设 $AB=a,BC=b,CC_1=c$.

连接 BD,因为 $BB_1\perp$平面 $ABCD$,所以 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle BDB_1$,即 $\angle BDB_1=30°$,所以 $\tan\angle BDB_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ①



因为 $DA\perp$平面 AA_1B_1B,所以 B_1D 与平

面 AA_1B_1B 所成的角为 $\angle AB_1D$，即 $\angle AB_1D=30°$，所以 $\tan\angle AB_1D=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}$. ②

由①②可得 $a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$，**故 A 不正确.**

过点 B 作线段 AB_1 的垂线，垂足为 O，连接 DO，由 A 可知 $BB_1=c$，$AB=\sqrt{2}c$，$AB_1=\sqrt{3}c$，则 $BO=\frac{\sqrt{6}}{3}c$，$B_1O=\frac{\sqrt{3}}{3}c$，$AO=\frac{2\sqrt{3}}{3}c$，又 $AD=c$，则 $DO=\frac{\sqrt{21}}{3}c$，所以 $DO^2+BO^2=BD^2$，所以 $BO\perp DO$.

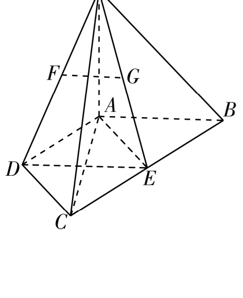
又因为 $DO\cap AB_1=O$，DO，$AB_1\subset$ 平面 AB_1D，所以 $BO\perp$ 平面 AB_1D，即 $BO\perp$ 平面 AB_1C_1D，所以 AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $\angle OAB$. 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中，$\sin\angle OAB=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}c}{\sqrt{2}c}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，**故 B 不正确.**

因为 $AC=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}c$，$CB_1=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}c$，**故 C 不正确.**

易知 B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $\angle DB_1C$，而 $DC=B_1C=\sqrt{2}c$，且 $DC\perp B_1C$，所以 $\angle DB_1C=45°$，**故 D 正确. 故选 D.**

快解 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle BDB_1$，B_1D 与平面 AA_1B_1B 所成角为 $\angle AB_1D$，则 $\angle BDB_1=\angle AB_1D=30°$. 设 $B_1D=2$，则 $AD=BB_1=1$，则 $AB_1=\sqrt{3}$，从而 $AB=\sqrt{2}$，则 $AB=\sqrt{2}AD$，AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $\angle B_1AB$，其正弦值为 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AC=\sqrt{3}>\sqrt{2}=CB_1$，$B_1D$ 与平面 BB_1C_1C 所成的角 $\angle DB_1C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **故 A，B，C 错误，D 正确. 故选 D.**

21. (1)**【证明】**连接 DE，AE，如图.



$\because F,G$ 分别为线段 PD,PE 的中点，

$\therefore FG//DE.$

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 均为等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，$\angle ADC=90°$，$\therefore AD=DC=CE=AE$ 且 $\angle AEC=90°$，

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 为正方形，$\therefore DE\perp AC$，又 $AB\perp AC$，又 $DE,AB,AC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore DE//AB.$

$\therefore FG//AB$，又 $FG\not\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，$\therefore FG//$平面 PAB.

(2)【解】由(1)知，$DE//AB$，$\therefore$ 直线 AB 与平面 PCD 所成的角即为直线 DE 与平面 PCD 所成的角.

$\because PA=AC$，不妨设 $DC=AD=a$，则 $DE=\sqrt{2}a$，$AC=PA=\sqrt{2}a$，$\therefore S_{\triangle DCE}=\dfrac{1}{2}a^2$.

$\therefore V_{P-DCE}=\dfrac{1}{3}\cdot AP\cdot S_{\triangle DCE}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}a\times\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$.

$\because PD=\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{3}a$，$DC=a$，$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=2a$，

$\therefore PD^2+DC^2=PC^2$，$\therefore PD\perp DC$，

$\therefore S_{\triangle PDC}=\dfrac{1}{2}\cdot PD\cdot DC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

设点 E 到平面 PCD 的距离为 h，

则 $h=\dfrac{3V_{P-DCE}}{S_{\triangle PDC}}=\dfrac{3\times\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

设直线 DE 与平面 PCD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{h}{DE}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{3}a}{\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$ 直线 AB 与平面 PCD 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

22. (1)【证明】由题可知 $A_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，$EF//A_1B_1$，所以 $EF\perp$ 平面 BCC_1B_1.

又因为 $GF\subset$平面 BCC_1B_1，所以 $GF\perp EF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle GC_1F$ 中，$GC_1=\dfrac{1}{4}CC_1=1$，$FC_1=\dfrac{1}{2}B_1C_1=2$，所以 $FG=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BB_1F$ 中，$BB_1=4$，$B_1F=\dfrac{1}{2}B_1C_1=2$，所以 $BF=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

在 Rt△BCG 中，$BC=4$，$CG=\frac{3}{4}CC_1=3$，

所以 $BG=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

则 $BG^2=FG^2+BF^2=25$，所以 $BF\perp GF$.

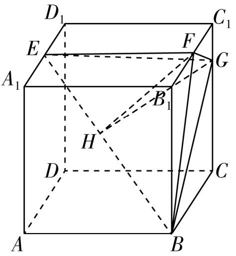
关键：要善于利用题目中的数据"算垂直"，即由"定量"到"定性"

因为 $GF\perp EF$，$GF\perp BF$，且 $BF\cap EF=F$，

提示：必须强调 $BF\cap EF=F$，紧扣判定定理

BF，$EF\subset$平面 EBF，所以 $GF\perp$平面 EBF.

(2)【解】过点 F 作 $FH\perp BE$ 于点 H，连接 HG，如图所示.



因为 $FG\perp$平面 EBF，$BE\subset$平面 EBF，所以 $FG\perp BE$，又 $FG\cap FH=F$，FG，$FH\subset$平面 FGH，所以 $BE\perp$平面 FGH.

又 $HG\subset$平面 FGH，所以 $BE\perp HG$.

提示：证明 $BE\perp HG$ 不可直接用三垂线定理，否则会扣分

所以∠FHG 即为平面 EBF 与平面 EBG 的夹角.

因为 $EF\perp$平面 BCC_1B_1，$BF\subset$平面 BCC_1B_1，所以 $EF\perp BF$，

在 Rt△BFE 中，$EF=4$，$BF=2\sqrt{5}$，则 $BE=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$，所以 $FH=\frac{EF\cdot BF}{BE}=\frac{8\sqrt{5}}{6}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

因为 $FG\perp$平面 EBF，$HF\subset$平面 EBF，所以 $FG\perp HF$，在 Rt△GFH 中，$GF=\sqrt{5}$，$FH=\frac{4\sqrt{5}}{3}$，所以 $\tan\angle FHG=\frac{GF}{FH}=\frac{3}{4}$，所以 $\cos\angle FHG=\frac{4}{5}$，即平面 EBF 与平面 EBG 夹角的余弦值为$\frac{4}{5}$.

23. (1)【证明】由 $BC=1$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$ 可得，$AC^2=AB^2+BC^2$，∴ $AB\perp BC$.

又 $PA\perp$底面 $ABCD$，$BC\subset$底面 $ABCD$，

$\therefore BC\perp PA$.

又 $AB\cap PA=A$, $AB, PA\subset$ 平面 PAB,

提示：要着力寻找平面内的两条相交直线

$\therefore BC\perp$ 平面 PAB.

$\because PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AD\subset$ 底面 $ABCD$,

$\therefore AD\perp PA$.

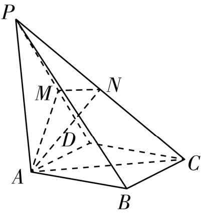
又 $AD\perp PB$, 且 $PB\cap PA=P$, $PB, PA\subset$ 平面 PAB,

$\therefore AD\perp$ 平面 PAB, $\therefore AD/\!/BC$.

提示：垂直于同一个平面的两直线平行

又 $BC\subset$ 平面 PBC, $AD\not\subset$ 平面 PBC, $\therefore AD/\!/$ 平面 PBC.

(2)【解】如图，作 $AM\perp PD$ 于点 M, $MN\perp PC$ 于点 N, 连接 AN.



因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $DC\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA\perp DC$.

又 $AD\perp DC$, $PA\cap AD=A$, $PA, AD\subset$ 平面 PAD, 所以 $DC\perp$ 平面 PAD.

因为 $AM\subset$ 平面 PAD, 所以 $DC\perp AM$.

又 $AM\perp PD$, $DC\cap PD=D$, $DC, PD\subset$ 平面 PCD, 所以 $AM\perp$ 平面 PCD.

又 $PC\subset$ 平面 PCD, 所以 $AM\perp PC$.

又 $MN\perp PC$, $MN\cap AM=M$, $MN, AM\subset$ 平面 AMN, 所以 $PC\perp$ 平面 AMN.

又 $AN\subset$ 平面 AMN, 所以 $PC\perp AN$.

所以 $\angle MNA$ 为二面角 $A-CP-D$ 的平面角, 所以 $\sin\angle MNA=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

因为 $PA=AC=2$, 所以 N 为 PC 的中点且 $AN=\sqrt{2}$.

在 Rt$\triangle AMN$ 中, $AM=AN\cdot\sin\angle MNA=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{42}}{7}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

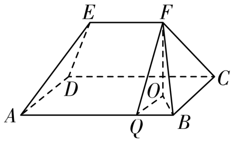
在 Rt$\triangle APM$ 中, $\sin\angle APM=\dfrac{AM}{AP}=\dfrac{\frac{2\sqrt{21}}{7}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$, 所以 $\cos\angle APM=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$,

所以 $\tan\angle APM=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $AD=PA\cdot\tan\angle APM=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

素养上分

1. $1\ 120\ m^3$ 【解析】如图,



已知 $AB=24,BC=12,EF=8$,

过点 F 作 $FQ\perp AB$ 于点 Q,过点 F 作 $FO\perp$平面 $ABCD$,垂足为 O,连接 OQ, OB,因为 $AB\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $FO\perp AB$,

又因为 $FQ\perp AB,FO\perp AB,FO\cap FQ=F$, $FO,FQ\subset$平面 FOQ,所以 $AB\perp$平面 FOQ,又 $OQ\subset$平面 FOQ,所以 $OQ\perp AB$.

因为四条侧棱长度相等,所以 $BQ=\frac{24-8}{2}=8,OQ=\frac{1}{2}BC=6$,

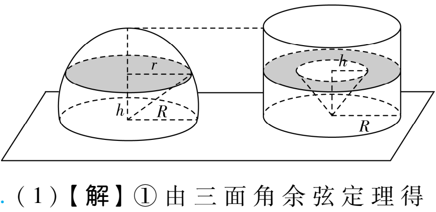
又侧棱与底面所成角均为 $\frac{\pi}{4}$,则 $FO=OB=\sqrt{OQ^2+QB^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$,即该刍甍的高为 10 m,所以其体积 $V=\frac{1}{6}\times(2\times 24+8)\times 12\times 10=1\ 120(m^3)$.

2. 66π 【解析】因为半球台下底面半径 $R=5$,上底面半径 $r=4$,

所以半球台高度 $h=\sqrt{R^2-r^2}=3$.

由祖暅原理得,半球台的体积等于底面半径为 R、高为 h 的圆柱的体积减去底面半径为 h、高为 h 的圆锥的体积,

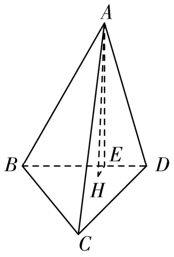
所以半球台的体积 $V=\pi R^2h-\frac{1}{3}\pi h^2\cdot h=75\pi-9\pi=66\pi$.



3. (1)【解】① 由三面角余弦定理得 $\cos 45°=\cos 45°\cos 60°+\sin 45°\sin 60°\cdot\cos\theta_1$,

即 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1$,解得 $\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

②如图①，过点 A 作 $AH\perp$ 平面 BCD，垂足为 H，过点 H 作 $HE\perp BD$ 于点 E，连接 AE.



图①

因为 $BD\subset$ 平面 BCD，所以 $AH\perp BD$，

又 $HE\cap AH=H$，HE，$AH\subset$ 平面 AEH，所以 $BD\perp$ 平面 AEH，

又 $AE\subset$ 平面 AEH，所以 $BD\perp AE$，

所以 $\angle AEH$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角，即 $\angle AEH=\theta_1$.

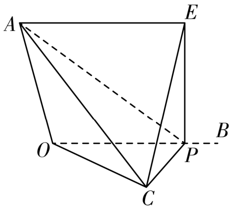
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$AE=AB\times\sin 60°=\sqrt{3}$，

由①得 $\cos\theta_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $AH=AE\times\sin\theta_1=AE\times\sqrt{1-\cos^2\theta_1}=\sqrt{2}$，

所以 $V_{A-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times AH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}BC\times BD\times\sin\ 45°\times\sqrt{2}=\dfrac{1}{6}BC\times BD\leqslant\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{BC+BD}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$，

当且仅当 $BC=BD=\dfrac{3}{2}$ 时等号成立，此时三棱锥 $A-BCD$ 的体积取得最大值 $\dfrac{3}{8}$.

(2)【证明】如图②，过点 C 作 $CP\perp OB$ 于点 P，过点 P 在平面 OAB 内作 OB 的垂线，过点 A 作 OB 的平行线，交垂线于点 E，连接 AP，AC，CE，则 $\angle CPE$ 是二面角 $A-OP-C$ 的平面角 θ，



图②

则 $PE\perp AE$，$CP\perp AE$，

又 PE，$CP\subset$ 平面 CEP，$PE\cap CP=P$，

所以 $AE\perp$ 平面 CEP，

又 $CE\subset$ 平面 CEP，所以 $AE\perp CE$.

在 $\triangle AOC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=OA^2+$

$OC^2-2OA\cdot OC\cos\gamma$,

在$\triangle CEP$中,由余弦定理得 $CE^2=CP^2+PE^2-2CP\cdot PE\cos\theta$,

两式相减得 $AC^2-CE^2=AE^2=OA^2+OC^2-CP^2-PE^2+2CP\cdot PE\cos\theta-2OA\cdot OC\cos\gamma$,

由勾股定理可得 $AE^2+PE^2=AP^2$, $OC^2-CP^2=OP^2$,

则 $AP^2=OA^2+OP^2+2CP\cdot PE\cos\theta-2OA\cdot OC\cos\gamma$,

即 $2OA\cdot OC\cos\gamma=OA^2+OP^2-AP^2+2CP\cdot PE\cos\theta$,

因为在$\triangle AOP$中,由余弦定理得 $OA^2+OP^2-AP^2=2OA\cdot OP\cos\alpha$,

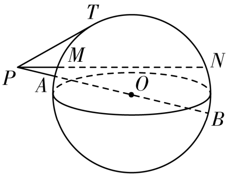
即 $2OA\cdot OC\cos\gamma=2OA\cdot OP\cos\alpha+2CP\cdot PE\cos\theta$,

两边同时除以 $2OA\cdot OC$,得 $\cos\gamma=\frac{OP}{OC}\cos\alpha+\frac{CP}{OC}\times\frac{PE}{OA}\times\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$,

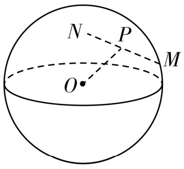
从而得证.

4. $\frac{8\sqrt{11}}{3}$ 【解析】如图①,任取一点 P 在球 O 外,过点 P 作球的切线 PT,切点为 T,作球的割线 PMN, PAB,

由圆中切割线定理可得 $PM\cdot PN$ 为定值,且定值为 $PT^2=PA\cdot PB=PO^2-R^2$(其中 R 为球 O 的半径).



图①



图②

如图②,任取一点 P 在球 O 的内部, MN 为过点 P 的动弦,由圆中相交弦定理可得 $PM\cdot PN=R^2-PO^2$(其中 R 为球 O 的半径).

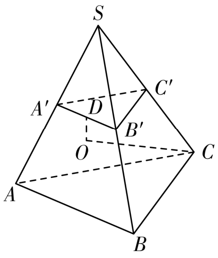
在上述两种情况中,我们把 $|OP^2-R^2|$ 定义为点 P 关于球 O 的幂,记为 $M_P(O)$.

设正三棱锥的侧棱长为 l,球 O 的半径为 R,

如图③,由题意得,点 D 在球 O 的内部,而点 C 在球 O 的外部,

故 $M_D(O)=R^2-OD^2$, $M_C(O)=OC^2-R^2=$

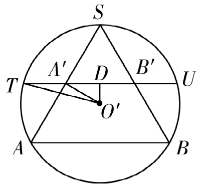
$CC'\cdot CS=\frac{1}{2}l^2$,



图③

又 D 为 $A'B'$ 的中点，设射线 $B'A'$ 与球 O 的球面的交点为 T，射线 $A'B'$ 与球 O 的球面的交点为 U，作出侧面 SAB 的截面如图④，

则 $R^2-OD^2=TD^2$，设 $\triangle SAB$ 的外接圆为圆 O'，连接 $O'T,O'A,O'D$，则 $AA'\cdot A'S=A'T\cdot A'U=O'T^2-O'A'^2=TD^2-1=\frac{1}{4}l^2$,



图④

故 $R^2-OD^2=1+\frac{1}{4}l^2$，又 $OC^2-OD^2=AB^2$,

故 $16=1+\frac{3}{4}l^2$,

即 $l^2=20,l=2\sqrt{5}$,

故正三棱锥的高为 $\sqrt{20-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{44}{3}}$，故体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times16\times\sqrt{\frac{44}{3}}=\frac{8\sqrt{11}}{3}$.

第六章 全章上分

1. A 【解析】对于①，因为 $\alpha\cap\beta=m,m/\!/n$，所以当 $n\subset\alpha$ 时，$n/\!/\beta$；

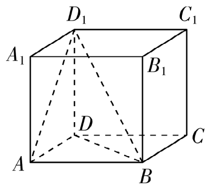
当 $n\subset\beta$ 时，$n/\!/\alpha$；当 $n\not\subset\alpha$ 且 $n\not\subset\beta$ 时，$n/\!/\alpha$ 且 $n/\!/\beta$，**故①正确**.

对于②，因为 $\alpha\cap\beta=m,m\perp n$，所以 n 与 α,β 的位置关系为在平面内、与平面平行或相交，**故②错误**.

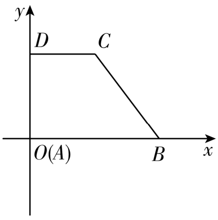
对于③，因为 $n/\!/\alpha$ 且 $n/\!/\beta,\alpha\cap\beta=m$，所以 $m/\!/n$，**故③正确**.

对于④，如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

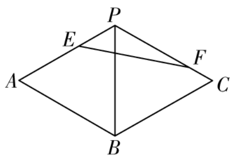
中,记平面 ADD_1A_1 为 α,平面 $ABCD$ 为 β,则直线 AD 为 m,记直线 BD_1 为 n,由正方体的性质可知 BD_1 与平面 ADD_1A_1 所成角为 $\angle AD_1B$,则 $\sin\angle AD_1B=\frac{AB}{BD_1}$,$BD_1$ 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle DBD_1$,则 $\sin\angle DBD_1=\frac{DD_1}{BD_1}=\sin\angle AD_1B$,此时 BD_1 与 AD 不垂直,即 m 与 n 不垂直,**故④错误. 故选 A.**



2. D 【解析】由题可知 $A'D'=\sqrt{2}$,将直观图还原为原图形,如图所示,则 $AB=4$,$AD=2\sqrt{2}$,$BC=2\sqrt{3}$,四边形 $ABCD$ 的周长为 $2+4+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$,四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(4+2)\times2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$. **故 D 正确.**



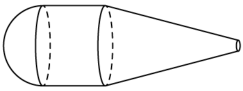
3. C 【解析】根据题意作出图形,如图所示,



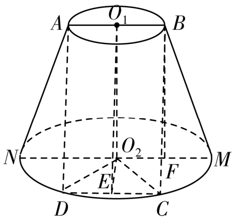
因为在底面为正方形的四棱锥 $P-ABCD$ 中,四条侧棱相等,且 $PA=AB$,所以四棱锥 $P-ABCD$ 是正四棱锥且所有的棱都相等,当沿 PA,PC 剪开展成平面时,EF 最短,在 $\triangle PEF$ 中,$PE=3$,$PF=6$,$\angle EPF=120°$,由余弦定理得 $EF^2=PE^2+PF^2-2PE\cdot PF\cdot\cos\angle EPF=9+36-2\times3\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=63$,解得 $EF=3\sqrt{7}$,所以蚂蚁爬行的最短距离为 $3\sqrt{7}$. **故 C 正确.**

4. A 【解析】根据题意,该组合体的直观图如图所示,因为半球的半径为 9.5 m,圆柱的底面半径为 9.5 m,母线长为

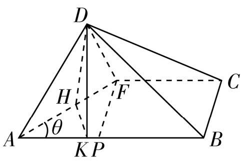
14 m,圆台的两底面半径分别为 9. 5 m 和 1 m,高为 31. 5 m,所以 $V_{半球}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\pi\times9.5^3=\frac{2\pi}{3}\times9.5^3\approx\frac{1\ 714\pi}{3}(m^3)$,$V_{圆柱}=\pi\times9.5^2\times14=14\pi\times9.5^2\approx1\ 260\pi(m^3)$,$V_{圆台}=\frac{\pi}{3}\times(9.5^2+1^2+9.5\times1)\times31.5=\frac{\pi}{3}\times31.5\times(9.5^2+10.5)\approx\frac{3\ 166}{3}\pi(m^3)$,所以浮空艇的体积 $V=V_{半球}+V_{圆柱}+V_{圆台}\approx\frac{1\ 714\pi}{3}+1\ 260\pi+\frac{3\ 166}{3}\pi\approx9\ 064(m^3)$,**故 A 正确.**



5. D 【解析】如图,因为矩形 $ABCD$ 的面积等于 $4\sqrt{3}$,且 $AB=2$,所以 $AD=2\sqrt{3}$. 取 CD 的中点 E,连接 O_1E,O_2E,则 $O_1E=2\sqrt{3}$. 设圆台的下底面圆的半径为 R,因为 $\angle CO_2D=60°$,所以 $\triangle CO_2D$ 为等边三角形. 因为 $R=CD=AB=2$,且 E 为 CD 的中点,所以 $O_2E=\sqrt{3}$. 在 $Rt\triangle O_1O_2E$ 中,可得 $O_1O_2=\sqrt{O_1E^2-O_2E^2}=3$,取 O_2M 的中点 F,连接 BF,可得 $BF//O_1O_2$ 且 $BF=O_1O_2=3$,在 $Rt\triangle BMF$ 中,$BF=3$,$MF=1$,可得 $BM=\sqrt{BF^2+MF^2}=\sqrt{10}$,所以该圆台的侧面积 $S=\pi(R+1)\times BM=3\sqrt{10}\pi$. **故 D 正确.**



6. C 【解析】如图,在平面 ADF 内过点 D 作 $DH\perp AF$,垂足为 H,连接 HK. 过点 F 作 $FP//BC$,交 AB 于点 P.



设 $\angle FAB=\theta$,在原矩形 $ABCD$ 中可得

$AE=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{5}$，所以 $\cos\theta\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

设 $DF=x$，则 $1<x<2$. 因为平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，平面 $ABD\cap$ 平面 $ABC=AB$，$DK\perp AB$，$DK\subset$ 平面 ABD，所以 $DK\perp$ 平面 ABC. 又 $AF\subset$ 平面 ABC，所以 $DK\perp AF$. 又因为 $DH\perp AF$，$DK\cap DH=D$，DK，$DH\subset$ 平面 DKH，所以 $AF\perp$ 平面 DKH，又 $HK\subset$ 平面 DKH，所以 $AF\perp HK$，即 $AH\perp HK$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，$AF=\sqrt{1+x^2}$，$DH=\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$.

因为 $\triangle ADF$ 和 $\triangle APF$ 都是直角三角形，$PF=AD$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle ADF\cong\mathrm{Rt}\triangle FPA$，$AP=DF=x$. 因为 $\triangle AHD\backsim\triangle ADF$，所以 $\frac{AH}{AD}=\frac{DH}{DF}$，$\frac{AH}{1}=\frac{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}}{x}$，$AH=\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$，所以 $\cos\theta=\frac{AH}{AK}=\frac{AP}{AF}$，$\frac{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}}{t}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，得 $x=\frac{1}{t}$. 因为 $1<x<2$，所以 $1<\frac{1}{t}<2$，所以 $\frac{1}{2}<t<1$. **故 C 正确.**

7. C 【解析】取 AD 的中点 E，连接 PE.

因为 $PA=PD$，所以 $PE\perp AD$.

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且交线为 AD，$PE\subset$ 平面 PAD，所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$.

设 $ABCD$ 的中心为 O'，球心为 O，则 $OO'\perp$ 平面 $ABCD$，于是 $O'B=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=2$，$OO'/\!/PE$.

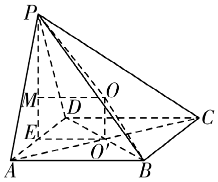
设四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球半径为 R，其表面积为 $4\pi R^2=20\pi$，故 $R=\sqrt{5}$.

过点 O 作 $OM/\!/O'E$，则四边形 $OO'EM$ 为矩形，故 $O'O=ME$，$OM=O'E=\frac{1}{2}AB=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO'B$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle OMP$ 中，$R^2=O'O^2+O'B^2=(\sqrt{5})^2=PM^2+OM^2$，$O'B=2$，$OM=1$，所以 $O'O=1$，$PM=2$，$ME=OO'=1$.

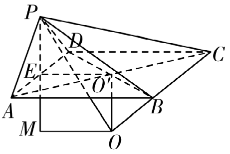
当点 O 在平面 $ABCD$ 的上方时，如图①，

此时四棱锥的高 $PE=PM+ME=3$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times2\times2\sqrt{3}\times3=4\sqrt{3}$.



图①

当点 O 在平面 $ABCD$ 的下方时，如图②，此时四棱锥的高为 $PE=PM-ME=1$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times2\times2\sqrt{3}\times1=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **故 C 正确.**



图②

8. B 【解析】如图，取 PB 的中点 N，PM 的中点 G，连接 AG,NG,AN，则 $NG/\!/BM$，

$\because DB=\frac{1}{4}PB$，$\therefore D$ 是 NB 的中点，

又$\because E$ 是 AB 的中点，$\therefore DE/\!/AN$，

$\therefore \angle ANG$ 为异面直线 DE 与 BM 所成的角或其补角，$\because PA\perp PB$，$PA\perp PC$，且 $PB\cap PC=P$，$PB,PC\subset$ 平面 PBC，所以 $PA\perp$ 面 PBC，又 $PN,PG\subset$ 平面 PBC，

$\therefore PA\perp PN$，$PA\perp PG$，又$\because PN=\frac{1}{2}PB=2$，$PG=1$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAN$ 中，$AN=\sqrt{PA^2+PN^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAG$ 中，$AG=\sqrt{PA^2+PG^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.

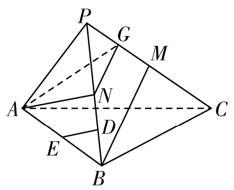
在 $\triangle BPC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BPC=\frac{PB^2+PC^2-BC^2}{2PB\cdot PC}=\frac{4^2+4^2-2^2}{2\times4\times4}=\frac{7}{8}$，在 $\triangle NPG$ 中，由余弦定理得 $NG=\sqrt{2^2+1^2-2\times2\times1\times\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore$ 在 $\triangle ANG$ 中，由余弦定理得

$\cos\angle ANG=\frac{AN^2+NG^2-AG^2}{2\cdot AN\cdot NG}=$

$$\frac{(\sqrt{13})^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-(\sqrt{10})^2}{2\times\sqrt{13}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{3\sqrt{78}}{52},$$

∴ 异面直线 DE 与 BM 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{78}}{52}$. **故 B 正确.**



9. ABC 【解析】对于 A,因为在 $\triangle BEF$ 中,高为点 B 到直线 EF 的距离,即 BB_1 的长度,为定值,底边为 EF 的长度,也为定值,所以 $\triangle BEF$ 的面积为定值,**故 A 正确;**

对于 B,因为线段 EF 在 B_1D_1 上,$B_1D_1 /\!/ BD$,$BD\perp AC$,所以 $B_1D_1\perp AC$,即 $EF\perp AC$,**故 B 正确;**

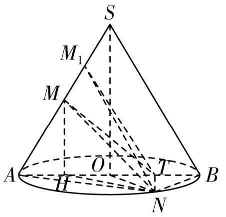
对于 C,连接 AB_1,AD_1(图略),点 A 到直线 EF 的距离等于 A 到直线 D_1B_1 的距离,由于 $\triangle AD_1B_1$ 为边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形,故点 A 到直线 D_1B_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,因此点 A 到直线 EF 的距离为定值 $\frac{\sqrt{6}}{2}$,**故 C 正确;**

对于 D,易知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$D_1D\perp$ 平面 $ABCD$,又 $D_1D\subset$ 平面 D_1DBB_1,所以平面 $D_1DBB_1\perp$ 平面 $ABCD$,即平面 $DEB\perp$ 平面 ABC,故二面角 $E-BD-C$ 的大小为 $90°$,**故 D 错误. 故选 ABC.**

10. BCD 【解析】如图,对于 A,设圆锥的底面半径 $R=\frac{1}{2}AB=6$,高为 h,由题意知,圆锥的母线长为 12,故 $h=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$,故圆锥体积 $V=\frac{1}{3}\times\pi R^2\times h=\frac{1}{3}\times\pi\times36\times6\sqrt{3}=72\sqrt{3}\pi$,**A 错误;**

对于 B,当 M 为 SA 中点时,设 M 在底面上的射影为 H,连接 MH,NH,则 H 为 OA 的中点,则 HN 为线段 MN 在底面的

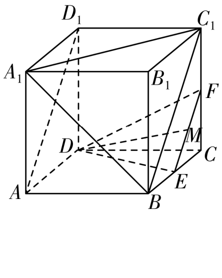
射影，$OH=3$，而 $\angle NOH=120°$，$ON=6$，在 $\triangle OHN$ 中，$HN^2=OH^2+ON^2-2OH\cdot ON\cdot\cos\angle 120°=9+36-2\times3\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=63$，即 $HN=3\sqrt{7}$，即线段 MN 在圆锥底面上的射影长为 $3\sqrt{7}$，**B 正确**；



对于 C，过点 N 作 $NT\perp AB$ 于点 T，作 $TM_1\perp SA$ 于点 M_1，连接 M_1N，BN，AN，MT，由于 $SO\perp$ 平面 ABN，$SO\subset$ 平面 SAB，所以平面 $SAB\perp$ 底面 ABN，因为平面 $SAB\cap$ 底面 $ABN=AB$，$NT\subset$ 底面 ABN，$NT\perp AB$，所以 $NT\perp$ 平面 SAB. 又 $SA\subset$ 平面 SAB，所以 $NT\perp SA$. 又 $TM_1\perp SA$，$TM_1\cap NT=T$，TM_1，$NT\subset$ 平面 NTM_1，所以 $SA\perp$ 平面 NTM_1，又 $M_1N\subset$ 平面 NTM_1，所以 $SA\perp M_1N$，故当点 M 与 M_1 重合时，$MN\perp SA$，**C 正确**；

对于 D，由 C 的分析知，$NT\perp$ 平面 SAB，因为 $MT\subset$ 平面 SAB，所以 $NT\perp MT$，直线 MN 与平面 SAB 所成角为 $\angle NMT$，易知 $\triangle OBN$ 为等边三角形，$NT=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，则 $\tan\angle NMT=\frac{NT}{MT}=\frac{3\sqrt{3}}{MT}$，当 $(MT)_{\min}=M_1T=\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times12=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ 时，所求角的正切值最大为 $\frac{2}{3}$，**D 正确. 故选 BCD.**

11. ABD　【解析】对于 A，如图，连接 BC_1，C_1A_1，则 $BC_1=A_1B=A_1C_1$，即 $\triangle A_1BC_1$ 为正三角形，又 E，F 分别为 BC，CC_1 的中点，故 $EF/\!/BC_1$，故直线 A_1B 与 EF 所成的角即为 $\angle A_1BC_1$ 或其补角，而 $\angle A_1BC_1=60°$，故直线 A_1B 与 EF 所成的角的大小为 $60°$，**故 A 正确**；



对于 B，因为 $AB // D_1C_1$，$AB = D_1C_1$，所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，所以 $AD_1 // BC_1$，而 $EF // BC_1$，所以 $EF // AD_1$，又 $AD_1 \not\subset$ 平面 DEF，$EF \subset$ 平面 DEF，所以 $AD_1 //$ 平面 DEF，**故 B 正确**；

对于 C，取 EF 的中点为 M，连接 DM，显然 $DE = DF$，故 $DM \perp EF$，假设平面 $DEF \perp$ 平面 BCC_1B_1，而平面 $DEF \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = EF$，$DM \subset$ 平面 DEF，则 $DM \perp$ 平面 BCC_1B_1，又 $DC \perp$ 平面 BCC_1B_1，则 $DM // DC$，而 $DM \cap DC = D$，故矛盾，**故 C 错误**；

对于 D，不妨设正方体棱长为 2，点 C 到平面 DEF 的距离为 d，则 $V_{D-CEF} = \frac{1}{3}S_{\triangle CEF} \cdot CD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2 = \frac{1}{3}$，而 $DE = DF = \sqrt{5}$，$EF = \sqrt{2}$，$DM = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$，则 $V_{C-DEF} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times d = V_{D-CEF} = \frac{1}{3}$，解得 $d = \frac{2}{3}$，设直线 CD 与平面 DEF 所成角为 θ，$0° \leqslant \theta \leqslant 90°$，则 $\sin\theta = \frac{d}{DC} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$，**故 D 正确**.

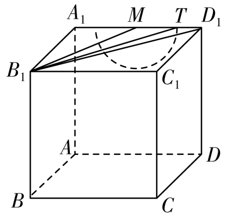
12. $4\sqrt{3}$ 【**解析**】如图，由题意得 $\angle B_1A_1D_1 = 60°$，连接 B_1D_1.

因为直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均相等，所以 $\triangle A_1B_1D_1$ 为等边三角形，取 A_1D_1 的中点 M，连接 B_1M，则 $B_1M \perp A_1D_1$.

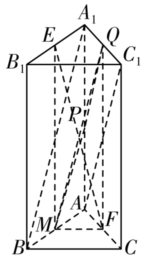
又 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$B_1M \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $AA_1 \perp B_1M$，因为 $A_1D_1 \cap AA_1 = A_1$，A_1D_1，$AA_1 \subset$ 平面 A_1D_1DA，所以 $B_1M \perp$ 平面 A_1D_1DA.

设直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2m$，则 $A_1M = m$，由勾股定理得 $B_1M = \sqrt{(2m)^2 - m^2} = \sqrt{3}m$，以 M 为圆心，r 为半径作圆，以 B_1 为球心，$\frac{\sqrt{13}}{2}$ 为半径的球面与侧面 ADD_1A_1 的交线长为半圆，故 $r \leqslant m$，$\pi r = \frac{1}{2}\pi$，解得 $r = \frac{1}{2}$，设半圆上一点为 T，连接 B_1T，则

$B_1T=\frac{\sqrt{13}}{2}$,此时 $B_1M^2+r^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$,即 $3m^2+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$,解得 $m=1$,由于 $r=\frac{1}{2}<1$,故符合题意. 此时 $B_1M=\sqrt{3}$,该四棱柱的棱长为 2,故该四棱柱的体积为 $A_1A\cdot A_1D_1\cdot B_1M=2^2\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.



13. $\frac{\sqrt{17}}{17}$　$\frac{7}{10}$　**【解析】**如图,取 AB 的中点 M,连接 EM,FM.



由题意可知,$EM\perp$ 平面 ABC,所以 $\angle EFM$ 为直线 EF 与平面 ABC 所成角,在 $\mathrm{Rt}\triangle EFM$ 中,$\tan\angle EFM=\frac{EM}{MF}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$,所以 $\cos\angle EFM=\frac{1}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

取 AA_1,A_1C_1 的中点分别为 P,Q,连接 MP,QP,QF,MQ,可得 $PM/\!/A_1B,PQ/\!/AC_1$,所以异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值为 $|\cos\angle MPQ|$.

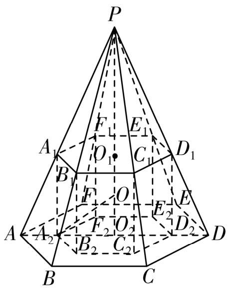
在 $\triangle MPQ$ 中,$PM=\frac{1}{2}A_1B=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AA_1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$PQ=\frac{1}{2}AC_1=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$MQ=\sqrt{MF^2+QF^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$,由余弦定理可得 $\cos\angle MPQ=\frac{PM^2+PQ^2-MQ^2}{2PM\cdot PQ}=\frac{\frac{5}{4}+\frac{5}{4}-\frac{17}{4}}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=-\frac{7}{10}$,所以异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\frac{7}{10}$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ 【解析】如图，依题意画出示意图，设正六棱柱为 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1-A_2B_2C_2D_2E_2F_2$，其中上底面 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的中心为 O_1，其外接球球心为 O，下底面 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的中心为 O_2，连接 OA_2.

因为 $PO_2=2\sqrt{3}AB=2\sqrt{3}AO_2$，$AP=\sqrt{13}$，所以在 $\triangle APO_2$ 中，$AP=\sqrt{AO_2^2+PO_2^2}=\sqrt{AO_2^2+12AO_2^2}=\sqrt{13}AO_2=\sqrt{13}$，所以 $AO_2=1$，$PO_2=2\sqrt{3}$.

设 $A_2O_2=x$，$AA_2=1-x$，因为 $\tan\angle PAO_2=\frac{PO_2}{AO_2}=2\sqrt{3}$，所以 $A_1A_2=2\sqrt{3}AA_2=2\sqrt{3}(1-x)$，所以 $OO_2=\frac{1}{2}A_1A_2=\sqrt{3}(1-x)$.

设正六棱柱的外接球半径为 R，在 $\triangle A_2OO_2$ 中，$A_2O^2=A_2O_2^2+OO_2^2$，所以 $R^2=x^2+[\sqrt{3}(1-x)]^2=x^2+3(1-2x+x^2)=4x^2-6x+3=4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}$，当且仅当 $x=\frac{3}{4}$ 时，R^2 取得最小值 $\frac{3}{4}$，此时球 O 的半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以球 O 的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.



15. (1)【证明】由题可知 $PA\perp PE$，$PE=DE=1$，$BE=\sqrt{EC^2+BC^2}=\sqrt{5}$.

因为 $AP=AB$，$\angle PAB=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle PAB$ 为等边三角形，所以 $PB=2$，所以 $PB^2+PE^2=5=BE^2$，所以 $PB\perp PE$.

因为 $PB\cap PA=P$，$PB\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAB，所以 $PE\perp$ 平面 PAB.

又 $PE\subset$ 平面 PBE，所以平面 $PBE\perp$ 平面 PAB.

(2)【解】由(1)得 $PE\perp$ 平面 PAB，所以

$V_{P-ABE}=V_{E-PAB}$，由三角形面积公式得 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}PA\times PB\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，故 $V_{P-ABE}=V_{E-PAB}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle PAB}\times PE=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由(1)得 $PE\perp PB$，$PE\perp PA$，$PA=PB=2$，

所以 $S_{\triangle PAE}=S_{\triangle PBE}=\frac{1}{2}PB\times PE=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$，$S_{\triangle EAB}=2$，故三棱锥 $P-ABE$ 的表面积为 $S=S_{\triangle PAE}+S_{\triangle PEB}+S_{\triangle EAB}+S_{\triangle PAB}=1+1+2+\sqrt{3}=4+\sqrt{3}$.

16. (1)【证明】在四边形 $ABCD$ 中，$AB// CD$，$AB\perp AD$，$AB=AD=2$，$CD=4$，

由勾股定理得 $BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=2\sqrt{2}$，

且 $\angle ADB=\frac{\pi}{4}$，

故 $\angle CDB=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos\angle CDB=8+16-2\times 2\sqrt{2}\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8$，

故 $BD^2+BC^2=CD^2$，则 $BD\perp BC$，$\triangle BCD$ 为直角三角形.

因为 $EA\perp$ 平面 $ABCD$，$FC// EA$，所以 $FC\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $FC\perp BD$，

因为 $BC\cap FC=C$，BC，$FC\subset$ 平面 BCF，

所以 $BD\perp$ 平面 BCF，

又因为 $BF\subset$ 平面 BCF，所以 $BD\perp BF$，

故 $\triangle BDF$ 为直角三角形.

因为 $FC\perp$ 平面 $ABCD$，BC，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $FC\perp BC$，$FC\perp CD$，

所以 $\triangle CDF$，$\triangle BCF$ 为直角三角形.

综上，四面体 $B-CFD$ 为鳖臑.

(2)【解】$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot BC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$，

因为 $FC\perp$ 平面 $ABCD$，且 $CF=4$，所以 $V_{F-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot CF=\frac{1}{3}\times 4\times 4=\frac{16}{3}$，

由(1)知 $BD\perp BF$，在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中，由勾股定理得 $BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=2\sqrt{6}$，

所以 $S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}BD\cdot BF=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times$

$2\sqrt{6}=4\sqrt{3}$,

设点 C 到平面 BDF 的距离为 d,又 $V_{C-BDF}=V_{F-BCD}=\frac{16}{3}$,

所以 $d=\frac{3V_{C-BDF}}{S_{\triangle BDF}}=\frac{3\times\frac{16}{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,点 C 到平面 BDF 的距离为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

17. (1)【**证明**】在正方形 $ABCD$ 中,因为点 E,F 分别是 AB,CD 的中点,所以 $BE/\!/FD$,且 $BE=FD$,故四边形 $BEDF$ 为平行四边形,所以 $BF/\!/ED$. 又 $BF\not\subset$ 平面 ADE, $ED\subset$ 平面 ADE, 所以 $BF/\!/$平面 ADE.

(2)【**证明**】当$\triangle ACD$ 为正三角形时,因为点 F 是 CD 的中点,所以 $AF\perp CD$. 在正方形 $ABCD$ 中,点 E,F 分别是 AB,CD 的中点,故 $EF\perp CD$.

又 $AF\cap EF=F$,$AF\subset$平面 AEF,$EF\subset$平面 AEF,故 $CD\perp$平面 AEF. 因为 $CD\subset$平面 $BCDE$, 所以平面 $AEF\perp$平面 $BCDE$.

(3)【**解**】如图,在四棱锥 $A-BCDE$ 中,过点 A 作 $AO\perp EF$ 于点 O,过点 O 作 $OG\perp DE$ 于点 G,连接 AG. 在正方形 $ABCD$ 中,令 $BC=a$,则 $AE=\frac{a}{2}$,$EF=a$.

因为$\triangle ACD$ 为等边三角形,点 F 为 CD 的中点,所以 $AF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,从而 $AE^2+AF^2=EF^2$,即 $AE\perp AF$.

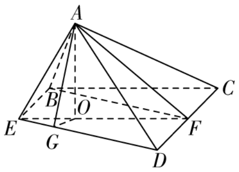
由(2)知,平面 $AEF\perp$平面 $BCDE$,平面 $AEF\cap$平面 $BCDE=EF$,$AO\perp EF$,$AO\subset$平面 AEF,故 $AO\perp$平面 $BCDE$,而 $DE\subset$平面 $BCDE$,从而 $AO\perp DE$.

又 $OG\perp DE$, $AO\cap OG=O$, $AO\subset$平面 AOG,$OG\subset$平面 AOG,

所以 $DE\perp$平面 AOG, 而 $AG\subset$平面 AOG,故 $DE\perp AG$,所以$\angle AGO$ 为二面角 $A-DE-C$ 的平面角.

在 Rt $\triangle EAF$ 中, $AO=\frac{AE\cdot AF}{EF}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$,$OE=\frac{1}{2}AE=\frac{a}{4}$.

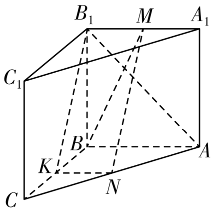
在 Rt $\triangle DEF$ 中，$EF\perp DF$，$DE=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，因为 $OG\perp DE$，所以 $\triangle EGO\backsim\triangle EFD$，所以 $\frac{OG}{DF}=\frac{OE}{DE}$，于是 $OG=\frac{OE\cdot DF}{DE}=\frac{\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{a}{4\sqrt{5}}$，从而在 Rt $\triangle AOG$ 中，$AG=\sqrt{AO^2+OG^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{16}+\frac{a^2}{80}}=\frac{a}{\sqrt{5}}$，故 $\cos\angle AGO=\frac{OG}{AG}=\frac{\frac{a}{4\sqrt{5}}}{\frac{a}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{4}$. 因此二面角 $A-DE-C$ 的余弦值为$\frac{1}{4}$.



18.【证明】(1)如图①，取 BC 的中点为 K，连接 B_1K，NK. 因为 N 为 AC 的中点，所以 $KN//AB$，$KN=\frac{1}{2}AB$.

由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可得四边形 ABB_1A_1 为平行四边形，M 为 A_1B_1 的中点，所以 $B_1M=\frac{1}{2}AB$，$B_1M//AB$，所以 $B_1M=KN$，$B_1M//KN$，所以四边形 B_1MNK 是平行四边形，所以 $MN//B_1K$.

因为 $B_1K\subset$ 平面 BCC_1B_1，$MN\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $MN//$平面 BCC_1B_1.



图①

(2)因为侧面 BCC_1B_1 为正方形，所以 $CB\perp BB_1$.

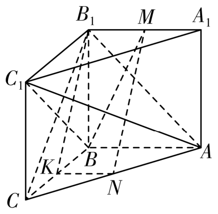
而 $CB\subset$平面 BCC_1B_1，平面 $CBB_1C_1\perp$平面 ABB_1A_1，平面 $CBB_1C_1\cap$平面 $ABB_1A_1=BB_1$，故 $CB\perp$平面 ABB_1A_1.

因为 $BM\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp BM$.

(3) 如图②,若选条件①,连接 AC_1, BC_1, $AC_1=3\sqrt{2}$.

因为侧面 BCC_1B_1 为正方形, $AB=BC=2$,所以 $BC_1=\sqrt{C_1C^2+BC^2}=2\sqrt{2}$,则 $BC_1^2+AB^2=8+4=12\neq18=AC_1^2$,所以 AB 与 BC_1 不垂直.

假设 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1,又 $BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1,所以 $AB\perp BC_1$,矛盾,故条件①不能选.



图②

若选条件②,由(1)知四边形 B_1MNK 是平行四边形, $MN/\!/B_1K$ 且 $MN=B_1K$.

因为 $MB=MN$,所以 $BM=B_1K$.

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 BCC_1B_1 为正方形, $AB=BC=2$, BC 的中点为 K, M 为 A_1B_1 的中点,所以 $B_1M=BK=1$,则 $\triangle BB_1M\cong\triangle B_1BK$,所以 $\angle BB_1M=\angle B_1BK=90°$,故 $A_1B_1\perp BB_1$,所以 $AB\perp BB_1$.

因为 $CB\perp$ 平面 ABB_1A_1, $AB\subset$ 平面 ABB_1A_1,所以 $CB\perp AB$.

因为 $CB\cap BB_1=B$, CB, $BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1,所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1.

若选条件③,连接 CB_1,因为 $CB\perp$ 平面 ABB_1A_1,所以三棱锥 $C-ABB_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABB_1}\cdot BC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot BB_1\cdot\sin\angle ABB_1\cdot BC=\frac{4}{3}$.

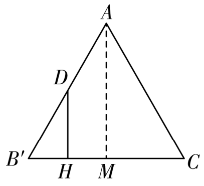
因为 $AB=BB_1=BC=2$,所以 $\sin\angle ABB_1=1$, $\angle ABB_1=\frac{\pi}{2}$, $BB_1\perp AB$.

因为 $CB\perp$ 平面 ABB_1A_1, $AB\subset$ 平面 ABB_1A_1,所以 $CB\perp AB$.

因为 $CB\cap BB_1=B$, CB, $BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1,所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1.

19.【解】(1) 在线段 BC 上存在点 F,且 $\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$,使得 $AF/\!/$ 平面 BDH. 理由如下:

取 $B'C$ 的中点 M，连接 AM，如图①所示.

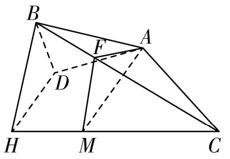


图①

因为 $\triangle AB'C$ 是等边三角形，$B'C$ 的中点为 M，所以 $AM\perp B'C$.

因为 $DH\perp B'C$，所以 $AM/\!/DH$.

如图②所示，$AM/\!/DH$，$AM\not\subset$ 平面 BDH，$DH\subset$ 平面 BDH，所以 $AM/\!/$平面 BDH，且 $\dfrac{HM}{MC}=\dfrac{1}{2}$.



图②

在线段 BC 上取点 F 使 $\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{1}{2}$，连接 MF，FA.

因为 $\dfrac{HM}{MC}=\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{1}{2}$，所以 $MF/\!/BH$.

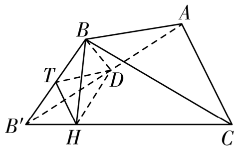
又因为 $BH\subset$ 平面 BDH，$MF\not\subset$ 平面 BDH，所以 $MF/\!/$平面 BDH.

又因为 $MF\cap AM=M$，MF，$AM\subset$ 平面 AMF，所以平面 $AMF/\!/$平面 BDH.

又因为 $AF\subset$ 平面 AMF，所以 $AF/\!/$平面 BDH.

所以存在点 F 满足题意，且 $\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 如图③所示，延长 AD 与 CH 的延长线交于点 B'，连接 BB'，取 BB' 的中点 T，连接 TH，TD.



图③

由折叠性质可得 $BD=B'D$，$BH=B'H$，$B'\in$ 平面 ABD，$B'\in$ 平面 BCH.

因为 $DH\perp BH$，$DH\perp CH$，$BH\cap CH=H$，BH，$CH\subset$ 平面 BCH，所以 $DH\perp$ 平面 BCH.

又 $TH\subset$平面 BCH，所以 $DH\perp TH$.

因为 T 为 BB' 的中点，所以 $TH\perp BB'$，$DT\perp BB'$，所以 $\angle DTH$ 即为平面 BHC 与平面 BDA 所成的二面角的平面角.

由(1)可得 $DH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$B'H=BH=\dfrac{1}{2}$，$BD=B'D=1$.

因为平面 BHC 与平面 BDA 所成的二面角的正切值为 $2\sqrt{2}$，所以 $\tan\angle DTH=\dfrac{DH}{TH}=2\sqrt{2}$，所以 $TH=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$，所以 $B'T=\sqrt{B'H^2-TH^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$，所以 $B'B=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

设点 B 到直线 CH 的距离为 h，则 $S_{\triangle BHB'}=\dfrac{1}{2}\cdot BB'\cdot TH=\dfrac{1}{2}B'H\cdot h$，即 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{8}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}h$，解得 $h=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，即点 B 到直线 CH 的距离为 $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.